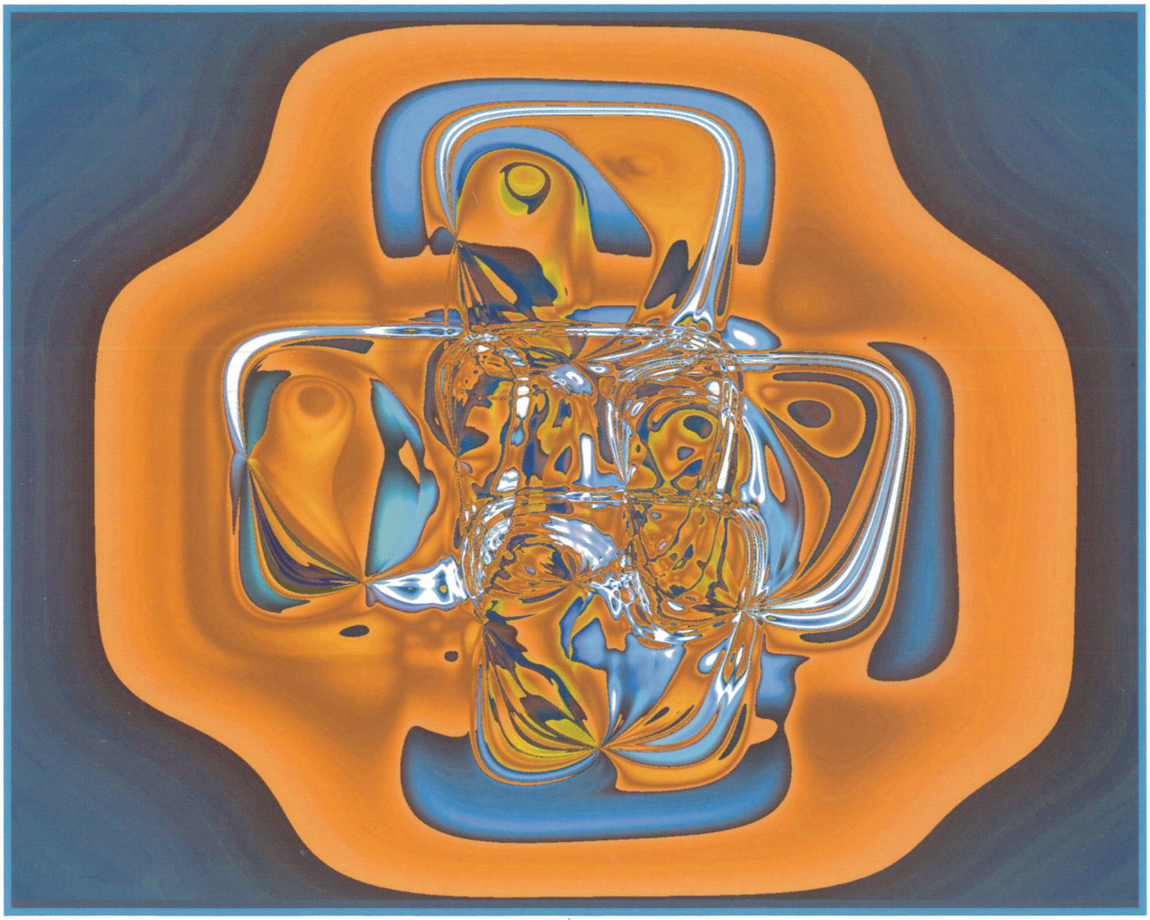
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年11月1日発行　第46巻11号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

11
2008

特集　物理と論理
概念規定と論理構造をとらえ直す



No.545
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 545 November 2008

物理と論理
概念規定と論理構造をとらえ直す

表紙：戸川 隼人

November 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 545

特集／物理と論理

巻頭言

細谷 暁夫

本特集では，物理学と関連する理論科学の専門家の方々に，「論理」の観点から寄稿して頂きました．

物理学の中では，古典力学における慣性系の存在，熱力学については統計力学との関係および情報の役割，量子力学については「粒子と波動の二重性」と量子論理，相対論については特異点定理の証明方法を取り上げて，書いて頂きました．

体系の中で仮定せざるを得ないものが何かを明らかにしていく必要性は，古典力学と熱力学に特にはっきり出ているように思います．また，統計力学から熱力学が導かれるという俗説については，この特集を読むと払拭できます．量子力学において粒子性をあらわす実験的証拠というのも，よく考えると簡単でないこともわかります．特異点定理については，名前だけは知っている人が多いと思いますが，その証明に背理法が使われていることは意外に知られていないようです．

物理の記事の中に現れるキーワードの一つが情報です．情報量を物理学の中に取り込むことはこれからの課題ですが，そのときには情報科学の方が論理をどうとらえているかも知っておいたほうがよいと思います．言うまでもなく，数学は論理と密接な関係にありますが，ここでは背理法を使う証明とそうでない証明に数論を例に説明して頂きました．背理法を使わずに証明できるほうが，証明の発展性があると思いますが，そうできない場合もあり，多分特異点定理はその仲間なのでしょう．さらに，ゲーデルの不完全性定理についても，それを適用範囲を超えて神秘化する俗説もあるので，コラムで注意を促して頂きました．

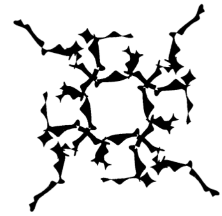
私見ですが，論理学といえども不滅のものではなく，数学や物理学などの発展の中で姿を変えて来たように思います．現代の形式論理学は，どこかニュートン的な世界観から抽出してきたもののように思います．多分，量子力学的世界観の中では，もう少し柔軟な論理が必要なのかも知れません．そして，社会の発展の中で新しい論理も受け入れられて行くものだという気がします．

執筆者は，私の独断で，日頃からご自分の学問の論理性に強い思いをお持ちと見受けられる方を選ばせて頂きました．寄せられた原稿は多彩ですが，いずれも内容にはっきりしたメッセージ性があり，読者は必ずや他では読んだことも聞いたこともない何かを発見されると思います．そして，全体として何やら一体感のある特集になったのは望外の喜びです．思うに，寄稿された方々に共通して流れるものがあるということは，現代物理学のおかれた時代背景があるからでしょう．諸兄姉のご感想をおききするのが楽しみです．

こういう企画は専門誌ではとうてい無理で，本誌がこのような学際的フォーラムを提供してくださったことに感謝します．

（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

慣性の法則と慣性系の存在について



岡 村　浩

1. 物理学講義第１回

長い間大学１年生対象の物理学講義を続けてきました．よく続いたと思いますが，それは物理学が面白かったからでしょう．第１回は学生との顔合わせです．物理学の全貌，大学物理の性格などを話した上で，種が尽きるとそろそろ本題にはいります．最初はニュートン力学の第一法則，すなわち慣性の法則です．結論は

慣性の法則は悩むところじゃない．試験には出さない．

したがって読者の中にもし大学１年生が混じっていらっしゃったら，万一おわかりにならなくても一切気になさらないで下さい．

もう少し付け加えれば，

慣性の法則の成り立つ座標系を慣性系とよぶ．
議論の出発点として慣性系の存在を仮定するのが，慣性の法則の意義である．

私の講義ではこれで第１回はおしまいですが，この原稿では本特集の趣旨を横目で見ながら少し背伸びしてみます．

2. 慣性の法則と論理

山内恭彦先生*1)の『一般力学』に慣性の法則は次のように書いてあります．

他の物体から十分離れたとき質点は等速度運動をなす

前半が特徴的です．物体が離れているかどうかは見ればわかるからです．素朴に言うとこれを

他の物体からの力が働かないとき質点は等速度運動をなす

と書くところですが，意地悪な人に「力とは何か言ってみろ」と迫られるのも厭ですからね．まだ力は定義されていません．

次に山内先生は実測的に質量 m を定義し*2)，質量と加速度の積として力を定義します．それが第二法則です．

以下力学の出だしはかなり慎重に書いてあります．法則は論理で導けるものではないという前提がしてあります．

3. 標準的教科書

標準的な教科書として原島鮮『力学』*3) を広げて見ました．この本は大学１年生のとき，サークルで輪講した本です．

*1) 山内恭彦著，『一般力学』岩波書店，初版 1941 年，増訂第 3 版 1959 年．山内（やまのうち）恭彦先生には駒場で 2 年後期，理学部物理学科に進学が決まってから力学の講義を受けました．ほとんど最後の学年ではないでしょうか．教室の暖房はだるまストーブで，その焚き方が駄目だと怒っていらっしゃいました．教室の一番前に座って居眠りをして叱られました．そういう時に限って当てられるのでした．卒業後，先生宅にお伺いしたことがあります．君もニヒリズムかとおっしゃって，先生のニヒリズム的な御本を頂戴しました．『回転群とその表現』（岩波書店）という名著がありました．「この本は面白いか」という序文の中の問いかけが面白かったです．『一般力学』も名著と言われております．

*2) 加速度が標準質点の $1/m$ 倍だとしたときに，その質量を m とします．

*3) 原島鮮著，『力学』裳華房，初版 1958 年，第 3 版 1985 年．

経験によれば，“太陽系の重心に原点をおき，恒星に対して回転しないような座標系”によって運動を記述すると力学の法則が簡単になる．このような座標系に対して運動を記述すると

“質点は，ほかの物体から十分遠く離れると等速直線運動を行う”ことが経験法則として知られている．これを，運動の第1法則または慣性の法則と呼ぶ．

同じ本の第3版ではそれが次のように変っていました．

慣性系の定義：1つの直交座標系を考える．任意の物体（質点）が，他の物体から十分離れているとき，この物体が考えている座標系に対して等速直線運動を行うとする．そのとき，この直交座標系を慣性系とよぶ．

経験法則：全宇宙にある全部の星雲に対し等速直線運動を行い，回転しない座標系は慣性系である．

さらに，普通は「他の物体から力が働かないとき」と書かれることが多いが，まだ力の定義は下していないのでこのように書いたという注釈があります．

それにしても「全部の星雲に対し*4)」なんて言うのは面白いです．原島先生進んでます．

私の本にはこう書きました*5)．

他の物体からの影響が無視できる場合，粒子は等速直線運動を続ける．

前段で山内先生の『一般力学』を意識していたのは確かです．後段は静止または等速直線運動と書くのが普通でした*6)が，静止は速度0だとしてまとめました．

4. ニュートンの『プリンキピア』

ここで古典力学の最初の教科書，『プリンキピア』での慣性の法則を見ましょう．驚くべきことに，回転まではいっています．

すべての物体は，それに加えられた力によってその状態が変化させられない限り，静止あるいは一直線上の等速運動の状態を続ける．

投射体は，空気の抵抗によって妨害されたり，あるいは重力によって落下させられたりしない限り，それらの運動を続ける．コマは，その諸部分がそれらの凝集力によって絶えず直線運動からそらされているが，そのような一つのコマは，空気による妨害がない限り，その回転をやめない．より自由な空間において，より小さい抵抗を受けつつある惑星や彗星のような，より大きい物体は，はるかに長い時間，その前進運動と円運動を維持する．

つまり慣性の法則を説明するための例として，① 放物運動，② 天体の運動，③ コマの回転，の3つを持ち出しているのです．①と②については，抵抗や重力のような力のない場合を想像することによって慣性の法則を主張しています．③には驚きますが，回転を全体として考えているのではなくて，個々の部分の運動が等速直線運動と見なされることを主張するのでした．その前提として，絶対静止空間の存在が仮定されています．

ここで私はチャンドラセカール先生に解説をあおぎたいと思います*7)．

法則のこのような述べ方は，（マックスウェルによると）‘正確’ではない．なぜならこの法則のこの表し方では，‘物体’をどう理解してよいかわからないからである．もし‘物体’が質点あるいは〔二つ目の例の‘凝集力’という条件が示唆するように〕‘剛体’を意味するものであれば，このままの表現で正しい．しかしながら，この法則の中身は，法則2と3，および系4と5とを関連させてみると，ずっと広い内容をもっていることがわかる．これらの法則のマックスウェルによる再定式化が，このことをはっきり示している（マックスウェルによる再定式化は10節に与えられる）．

ここで言うマックスウェルは電磁気学のマック

*4) あとに述べるような事情で，こういう表現を見ると私は武者震いするのです．

*5) 徳永旻・岡村浩著，『現代の古典物理』現代書館，1975年．

*6) 小谷正雄編，『物理学概説』裳華房，初版1950年，改訂版1953年．力が働かないときには質点は静止或いは等速度運動を継続する．これが私の1年生当時大学指定の教科書でした．力学担当執筆は山内先生となっています．

*7) 中村誠太郎監訳，『チャンドラセカールの「プリンキピア講義」』講談社，1998年．

スウェルで，その中の

系の質量中心は，系に働く外部からの力によってその状態を変化させられない限り，静止の状態，あるいは直線上の一様な運動の状態を続ける，

が慣性の法則に当たります．

質点系まで話を広げてから慣性の法則を始めるのはつらいので深入りはやめてガリレオに遡りましょう．

5. ガリレオの『新科学対話』

そもそも慣性というのは聞きなれない言葉です．別名は惰性．英語で inert は不活発という意味がありますから，inertia は惰性と呼ぶほうが適しているような気がします．

さて慣性の法則を主張した一人としてはガリレオ・ガリレイが有名です．

原康夫先生が振動と波動についての連続講座をお始めになりました．振動の最初の講座でガリレオが振り子の問題から慣性の法則を導いたとおっしゃいました．どういうことかと少しびっくりしましたが，次の通りです*8)．

慣性の法則を説明するに当たってガリレオは図1のような坂道を考えます．坂道の左側はそのままで右側の傾斜を少しずつ小さくしていきます．どの場合も元と同じ高さまであがります．

最後に傾斜を0にすればいつまで経っても元の高さになりませんから永遠に運動が続くはずです．これが慣性の法則の‘証明’です．

この前提となる，元の高さまで上がることは，力学的エネルギーの保存則を仮定しているわけですが，そのために振り子が出てくるのであって，そのためには図2のように，振り子の運動で元と同じ高さまで上がるという実験結果を根拠とします*9)．

これが振り子を用いて慣性の法則を導いたという話です．

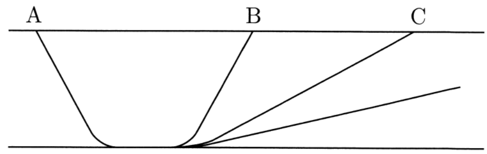


図1 Aから滑り出した物体はBやCのように同じ高さまで上る．水平にすべり出した場合はいつまで経っても同じ高さにならないので永遠に滑り続ける．

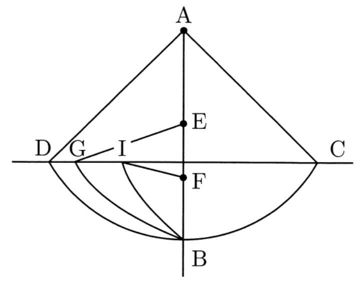


図2 Cから振り出されると同じ高さのDまで行く．EやFで邪魔されると各々GおよびIまで行く．D, G, I は同じ高さである．

なぜここに引っかかったかと言うと以前ファイヤアーベント*10)と言う人の本を読んでいて，ガリレオのこんなエピソードが印象に残ったからです*11)．

ガリレオは船に乗っていて，船の上でペンを使っていました．ふとガリレオはこのペンの動きが，水上に固定された人からはどういう風に見えるかと想像してみたのだそうです．ペンを止めるとペンは船と共にしずしずと進みます．ペンを動かすと，ペンは船の運動を基準としてそれより少し前後左右・上下にずれます．そういうことを考えているうちに思いついたことがあるというのです．これは，慣性の法則というより，ガリレオの相対性原理，と言うべきでしょうね．

*8) 原康夫，パリティ 23 巻第 4 号 p.56（丸善）2008.

*9) ガリレオ著，今野武雄・日田節次訳，『新科学対話 下』岩波書店（1948），p.31 第 46 図，p.103 第 83 図．（ここで滑らすものが少しでも大きさを持っていると角で引っかかります．そのために，講義では角を丸くしておきます．余計なお世話かも知れません．）

*10) ファイヤアーベント著，村上陽一郎・渡辺博共訳，『方法への挑戦』，新曜社（1981）p.96. 天動説でも周転円をたくさん使って天体の運行を説明することができました．いまの物理学でも現象を説明できるまで第一近似，第二近似と議論を積み重ねていて，本質的な違いはないのではないか．そういう議論が印象に残りました．これは法則への信頼を生きる力としている物理学の方法への挑戦だと思います．

*11) ガリレオ著，青木靖三訳，『天文対話 上』岩波文庫（1959）p.260.

実際しずしずと進む船の上では自分が動いているかどうかを体感することはできません．中国でも船の発達と共にそのことに気づいた人がいて，長岡半太郎先生が相対論の本の序文に引用していらっしゃいます*12)．

6．ガリレオの『新科学対話』：天動説と地動説

ガリレオは何のために慣性の法則が必要だったのでしょうか．それは当時が天動説と地動説との間で人々の考えがゆれていたからです．

例えばこのような地動説に対する反論が考えられます．

大砲の弾をまっすぐ打ち上げます．大砲の弾はまっすぐ落ちてくるでしょう．

もしその間に地面が水平に動いたら，大砲の弾は元の位置に落ちてくるはずはありません．

実際はまっすぐ落ちてくる．

だから，地面が動いているはずはありません．

鳥が巣から飛び立ったとします．空中に支えはありませんから，その間に巣が水平方向に動いたら，元の巣に戻れるはずがありません．だから，地面が動いているはずはありません．

皆さん，こういう天動説論者がいて，それに反論できなかったら地動説を唱える資格がないのですよ．

反論のために必要なのが慣性の法則です．

大砲の弾丸は大砲の中にいるときに地面と同じ速さで水平方向に動いています．打ち上げられたとき，水平方向の速さは同じですから，結局まっすぐ上に登り，まっすぐ下に落ちてきます．鳥も同じで，けっしてとり残されることはありません．

現代なら新幹線の中でボールを落としてご覧なさい．ちゃんとまっすぐ下に落ちます．

ボールが真下に落ちるからと言って新幹線が止まっているとは限りませんから，地動説が間違っていないということはあり得るのです．

新幹線の片隅でボールの代わりにハンカチを落として見たことがあります．知らない人がそのときの僕を見たら，妙に思ったでしょう．

ガリレオの慣性の法則は水平方向だけの慣性の法則で，厳密に言えば等速円運動に過ぎません．3方向全部考えた慣性の法則は，直線上の運動を基本としたデカルトを待つ必要がありました*13)．

7．慣性の法則を示す実験事実

改めて言うのもどうかと思いますが，慣性の法則を説明するために取り上げる実験事実にはどういうことがあるでしょうか．

(1) スケートリンクで物を蹴飛ばします．氷の上では摩擦が小さいので相当遠くまで同じ速さで進むように見えます．摩擦が0になった場合を想像すれば，慣性の法則が成り立つと思えるでしょう．実際に摩擦が0になることはありません．想像するという作業のところに慣性の法則の難しさがあります．

(2) だるま落としという玩具があります．
いくつかの物体の上にだるまを置いて，木槌で物体を横に叩きます．叩かれた物体の他はそのまま居続けようとしますから，だるまも，運が良ければ，一つ少なくなった物体の壇上に居続けます．但し，最近ではだるま落としを見ることがあまりありませんね．

(3) 進んでいる船の上で壇の上から進行方向に向かって跳んでも，逆方向に飛んでもまったく同じとび方になります．そうやって，慣性の法則を納得したと書いていらっしゃった大先生がありました．

(4) 電車に乗ったことのない学生はいません．電車が動き出したとき，その逆方向に力を感じま

*12) アインシュタイン著，桑木彧雄訳，『相対性原理講話』岩波書店（1921）．

*13) コイレ著，菅谷暁訳，『ガリレオ研究』法政大学出版局（1988），p.148．「自然学者デカルトの最も栄えある業績は，慣性の原理に「明晰判明」な定式を与え，それを然るべき位置に置いたということである」．デカルト著，神野慧一郎訳，『世界論』中央公論社（1967），世界の名著 22 所収，p.104～105．『世界論』はデカルトがガリレイの裁判結果を聞いて出版をやめたので死後に出版された．デカルト著，桂寿一訳，『哲学原理』岩波書店（1964）p.126．

す．慣性の法則を知らないと安全に電車に乗っていることができないのです．

(5) でも，先ほども書きましたが，新幹線の中でものを落とすのが一番わかりやすいと思います*14)．

君はこの教室が動いていると思いますか．それならなぜものがまっすぐ落ちるのですか？

この教室は動いています．大陸移動説．（うーむ）*15)．

地震でもなければ部屋が動くことを実感できるはずはありません．

にもかかわらず地動説を信じるのは，皆がそう思っているからというのでは不十分です．

慣性の法則を知っていなければいけません．

「死刑台のエレベーター」という映画があります．

エレベーターの綱が切れて死亡事故が起こります．綱が切れてしばらく，エレベーターの中では重力がなくなったように感じるだけで何事も起こりません．エレベーターが地上に落下した直後，浮いていた人間は壁に激突します．人間を基準にすれば，壁にぶっ叩かれることになります．

このような体験を私たちもしています．地球というエレベーターは太陽に向かって落下しています．太陽からの引力を体感することはありません．

8. ガリレオ以前

物理学の通史として広重徹の『物理学史 I, II』*16)にはお世話になりました．

斜めに物体を投げ上げると水平方向の速度は変わりません．これは水平方向の慣性の法則と言えます．しかし中世の人は違う解釈をしていました．投げられた物体にはインピタス（勢い）があって，勢いが消費されてなくなるまで飛び続けるというのです．勢いの消費を0にすることは想定されていません．

慣性の法則はケプラーに始まると言います．慣性（inertia）という言葉を初めて作ったのはケプラーです．但し，彼の慣性の法則は速度に抵抗する慣性で，物体は力が働かない限り静止状態を続けようとするのです*17)．ニュートン力学では加速度が距離の -2 乗に比例しますが，ケプラーの理論では速度が距離の -1 乗に比例し，それは太陽の影響が楕円上を広がることと関係づけられるのです．それが面積速度一定の法則です．

9. 第二法則と第一法則

以上で第1回講義のときに話すたわいのない話は大体終わりですが，一つ強調しなければならないのは第二法則と第一法則の関係です．

ご承知のように第二法則は

$$ma = F \tag{1}$$

と表されます．m は（慣性）質量，a は加速度，F は力です．これを x を求める微分方程式と考えても良し，力 F の定義と考えても良しです．問題は力 $F = 0$ とすれば加速度 $a = 0$ となるので，速度 v は一定．従って，

力 $F = 0$ なら速度 v は一定である．

という慣性の法則が第二法則の中に含まれるのではないか．

それに対しては断固としてNOと申し上げる．

第一法則があって，慣性系が用意されてはじめて第二法則を議論することができます．冒頭に述べた通りです．

慣性系に対して一定速度で動いている座標系は慣性系である．したがって慣性系が一つあれば慣性系は無限大個ある．

これは自明ですが，追加しておきます．

10. 慣性系を求めて

突然ですが，黒船のやってきたときの幕末の人々

*14) コイレ著，『ガリレオ研究』法政大学出版局（1988），p.296. ガッサンディは船の上で石を落としました．その結果として「慣性の原理の正しい定式を初めて公表する—初めて言明するではないにしろ—という不朽の名誉を手に入れたのである．」(p.295)

*15) ある学生の回答です（実話）．

*16) 広重徹著，『物理学史 I，II』培風館（1968）．

*17) 山本義隆著，『重力と力学的世界』現代数学社（1981）p.25.

の驚きはいかばかりだったでしょう．福沢諭吉が咸臨丸で大量の物理の教科書を調達し，慶應義塾で必修にしたのもうなずけます．戦後も日本の製造業が日本の興隆を齎しました．

その成功の基本は物理法則が成り立っていたからです．

そのとき，慣性系があるかどうかなどという議論は迂遠に思えます．

慣性系はどこにあるでしょう．

まずこの部屋が慣性系であるかというと，地球の自転，公転を考えれば厳密に慣性系とは言えません．地震や，それこそ大陸移動説もこの部屋の運動の原因です．銀河系の中での太陽系の運動だってあります．

実際はこの部屋を慣性系と見なしてさしつかえありません．それは，この部屋の「運動」を無視できるという近似において可能です．問題に応じて近似の程度を決めれば良いでしょう．地球の球面の一部を，平面と見なしてかまわないのです．自転の効果を重力定数にくりこんでおくこともできます．教室での振り子の実験に月の効果を無視してかまいません．

山内先生の「十分離れた」という条件も，その意味は問題によります．地球と月くらい離れていても，十分離れたと見なせない問題が当然あるわけです．地球と月の運動を考えるときには互いの重力が距離の -2 乗に比例することが大事です．

そういうことでやっても，物理法則が成り立つということ，そのことを信じていられるということは最大の神秘であると思います*18)．

11．一般相対論とマッハ原理

力学のうるさ方としてマッハは欠かせません．マッハの『力学史』が入手しやすくなったのは喜ばしいことです*19)．マッハは天下りの仮定を嫌い，すべてを現象から導いたこととして物理学を構成したいと考えていました．ここでとりあげたいのはマッハがニュートンの絶対空間の仮定，特に水桶の実験についてマッハが噛み付いていることです．

ここで私事ですが，素粒子論で開発された手法を重力の理論に応用しようという議論の中で，アインシュタインが一般相対論でやり残した問題が手つかずで残っていたことに気づいたことがあります．一般相対論では重力が弱い，天体の運動がゆっくりだと仮定していくつかの結論が導かれ，それが実験と合うということが初期の一般相対論の成功とされてきました．その後，重力が強い場合の結論も有用であることがわかり，一般相対論の意義は確立されました．重力が弱いときの最初の近似をポスト・ニュートン近似と言います．その次の近似での計算（私たちはポスト・ポスト・ニュートン近似と呼びましたが，セカンド・ポスト・ニュートン近似と呼ばれます）が残されていたのです*20)．そのごく一つの応用として，水桶の実験に相当するいくつかの問題をためしに取り扱いました．どういうことかと言うと，宇宙全体の星が一定の角速度で回転している場合，その一般相対論的な効果で遠心力とコリオリ力が矛盾なく導かれるかという問題です．私共の結論は，遠心力を導くための条件とコリオリ力を導くための条件が異なるために，宇宙全体の回転については絶対性があると考えざるを得ないということでした．

有名な，双子のパラドックスの問題でも地上で静止している空間と往復する宇宙船上での空間との違いはあります．宇宙全体が動く解を一般相対論の中に取り入れるのは難しいのではないでしょうか．一般相対論は特殊相対論よりも一般的な座標変換をしても物理的な内容が変わらないと言いますが，全宇宙を動かすような座標変換は許していないようです．だからと言って他にやり方があるとは思えません．

（おかむら・ひろし，工学院大学共通課程物理学科）

*18) アインシュタインの言葉です．

*19) エルンスト・マッハ著，岩野秀明訳，『マッハ力学史 上・下』ちくま学芸文庫（2006）．

*20) 木村利栄・太田忠之著，『古典および量子重力理論』マグロウヒル（1989）．

平衡と非平衡の熱力学・統計力学

ミクロとマクロを結ぶ論理

田崎　晴明

この解説では，i. 平衡系の熱力学，ii. 平衡系の統計力学，iii. 非平衡定常系の熱力学という三つのテーマを概観し[1]，背後にある経験科学としての「論理」を明確にしてみたい．三つの内，i と ii は二十世紀初等までに完成された標準的な体系だが，iii は未だに模索の続いている（というより，私が日々頭を悩ませている）発展途上の話題である．これら三つを同じまな板にのせるのは少々大胆かもしれないが，それで物理学の生きた営みの一端を描くことができればと願っている．

■　1. 平衡系の熱力学—基本設定　■

熱力学は，マクロな（つまり，われわれに見えて触れられるような，大きな）系の平衡状態についての経験事実にもとづいて作られた理論体系である[2]．きわめて一般的な系にあてはまり，しかも定量的に厳密に成立する強力な体系である．

最も基本的な例として，図 1 のような，単一の容器の中に一種類の物質が閉じこめられた系を考える．容器の体積を V，その中の物質の総量（ここでは分子数）を N とする．

熱力学にとって本質的なのは，系の置かれている**環境**を制御できること，そして，系に対して外から（マクロな）**力学的な操作**をおこなえること，である．ここでは，断熱環境（系と外界の力学的でないエネルギーのやりとりを遮断するような環境）と等温環境（温度一定の環境）という二種類の環境を考える．操作としては，図 1 のように，容器につけたピストンを動かして容器の体積を変えることを考えよう．この際，外からピストンを動かす操作者は，操作に伴う力や仕事を正確に計測できるとする．

系を，断熱または等温環境に置き，何も操作をしないで長時間そのままにしておくと，最終的には**平衡状態**に到達する．平衡状態というのは，**マクロに見た際の時間変化がいっさいなく，マクロな物質やエネルギーの流れもいっさいない状態**である．さらに，こうして得られる平衡状態は，温度 T，体積 V，物質量 N の三つの量を与えれば完全に決まってしまうことも経験的に知られている．この性質のため，平衡状態を三つの量を並べた組 (T, V, N) で指定することができる．平衡状態が存在してこのように簡単に特徴付けられることは熱力学の基本となる重要な経験事実である．

以下，熱力学の実用的な部分にはいっさい踏み込まず，理論の核となる第一法則と第二法則を駆け足でみよう．

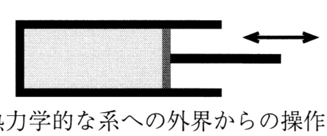


図 1　熱力学的な系への外界からの操作．容器についたピストンを動かして系の体積を変化させる操作を思い浮かべるのがよい．

■ 2. 平衡系の熱力学―第一法則 ■

平衡状態 (T,V,N) にある系を断熱環境に置き，外から力学的な操作を加え，系の体積を V' に変える．操作がおわった後十分に長い時間が経てば系は新しい平衡状態 (T',V',N) に落ち着く．以上のように，断熱環境で平衡状態 (T,V,N) から新しい平衡状態 (T',V',N) を作るプロセスを断熱操作と呼ぶ．操作のあいだにピストンを動かす操作者が系に対してした仕事を W とする．

各々の平衡状態に**エネルギー**と呼ばれる量 $U(T,V,N)$ を対応させ，任意の断熱操作について，

$$W=U(T',V',N)-U(T,V,N) \qquad (1)$$

が成り立つようにすることができる．この事実を熱力学の第一法則と呼ぶ．

ここで，エネルギー $U(T,V,N)$ に力学的な意味を持たせていないことに注意しよう．単に，測定可能な仕事 W と (1) で結ばれるような量が $U(T,V,N)$ だと考えるのである．マクロな系にも**厳密に保存される量があり，それが力学的な仕事と結びつくというのが第一法則の本質**である．

■ 3. 平衡系の熱力学―第二法則 ■

上と同様に，平衡状態から別の平衡状態への断熱操作を考える．ある平衡状態 (T,V,N) から出発したとき，**断熱操作で到達できる状態とできない状態がある**．たとえば，ピストンをガシャガシャと動かして元の位置に戻すような断熱操作を考えよう．最終的な体積と物質量ははじめと同じになるから，最初の状態を (T,V,N) とすると，操作後の状態は (T',V,N) と書ける．このとき断熱操作をおこなう限りはかならず $T'\geq T$ となる．

各々の平衡状態 (T,V,N) に**エントロピー**と呼ばれる量 $S(T,V,N)$ を対応させ，断熱操作によって平衡状態 (T,V,N) から (T',V',N) に到達できるための必要十分条件を，

$$S(T',V',N)\geq S(T,V,N) \qquad (2)$$

という形に書くことができる．この事実は熱力学の第二法則の一つの表現である．

断熱操作をきわめてゆっくりと（しかも，常に後戻りできるように）実行したときには，(2) は等式として満たされる．等温の環境の操作でこの等式に対応するのが歴史的にも有名なクラウジウスの関係式

$$S(T,V,N)-S(T,V',N)=Q/T \qquad (3)$$

である．ここでは，系を温度 T の環境に接触させたまま，体積をゆっくりと V から V' へと変化させる等温準静操作を考えている．そして，Q とは，この操作のあいだに系から環境に移動したエネルギーの総量，つまり，系から環境に流れた熱である．熱は，エネルギーの収支にもとづいて，$U(T',V',N)-U(T,V,N)=W-Q$ の関係によって定義する．

マクロな系には**「できる操作とできない操作」があり，それがエントロピーによって明確に区別できるというのが第二法則の本質**である．

■ 4. 平衡系の統計力学にむけて―エネルギー ■

このような熱力学の体系をミクロな力学にもとづいて理解することを考えていこう．そこで，大きく視点を変え，マクロな系も無数のミクロな要素からできていると考えることにする．

系が N 個の質量 m の単原子分子からなるとしよう．分子に $i=1,2,3,\cdots,N$ と名前をつけ，i 番目の分子の位置を $\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$，運動量を $\boldsymbol{p}_i=(p_i^{(\mathrm{x})},p_i^{(\mathrm{y})},p_i^{(\mathrm{z})})$ とする．分子には（二体の）分子間力と，壁などからの外力が働くとしよう．分子間力のポテンシャルエネルギーを $v(r)$（r は分子間の距離），外力のポテンシャルエネルギーを $V(\boldsymbol{r})$（$\boldsymbol{r}$ は任意の分子の座標）とする．

$\boldsymbol{r}_i$ や $\boldsymbol{p}_i$ をいちいち書くと大変なので，すべての分子の位置と運動量をまとめて列挙したものを $\Gamma=(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_N)$ と書く．状態 Γ の全力学的エネルギーは

$$E(\Gamma)=\sum_{i=1}^{N}\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m}+\sum_{i<j}v(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)+\sum_{i=1}^{N}V(\boldsymbol{r}_i) \qquad (4)$$

である．多体系の力学になじんでいない読者には

難しい式に見えるかもしれないが，右辺の第一項目がすべての分子の運動エネルギーの和で，残りは全系のポテンシャルエネルギー（広い意味での位置エネルギー）である．

系を構成するすべての分子の運動がニュートンの運動方程式に従うと仮定しよう（後でも議論するが，この仮定は全く自明ではない）．時刻 0 での系の状態を Γ とする．系が外から操作を受けずに孤立して運動して，ある時間の後に状態 Γ' に達したとする．このとき，$E(\Gamma)=E(\Gamma')$ が成り立つというのが，力学的エネルギー保存則である．

系を外から操作する場合はどうなるだろうか？「ピストンを動かして体積を変える」といった操作をどうやって力学で表現するかは難しい問題だが，標準的には，壁からの力を表すポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ を操作者が時間変化させるとして扱う．このように定式化すると，分子の力学を考える際には操作者のことは考えずに単にポテンシャルが時間変化するニュートン力学を用いればよい．この際，系の力学的エネルギー (4) は変化するが，その変化がちょうど外からの操作者のした仕事に等しくなることが示される．よって，系の時刻 0 での状態が Γ で，外からの操作を受けながら時間発展し，最終的に状態 Γ' に達したとすると，エネルギー保存則は

$$W=E(\Gamma')-E(\Gamma) \tag{5}$$

という形をとる．もちろん W は外からの操作者がした仕事である．

エネルギー保存則 (5) と熱力学第一法則 (1) はよく似ている．もし力学のエネルギーと熱力学でのエネルギーを同じものだと思っていいなら，これらは完全に同じ関係である（操作者のした仕事 W は熱力学の設定でも純粋に力学的な量だったことに注意）．そうすると，熱力学第一法則 (1) は力学のエネルギー保存則から自動的に導かれる法則だと思いたくなる．

しかし，落ち着いて考えてみると，この論法は論理的でない．われわれは無数の分子が複雑にからみあって運動している（と想像される）マクロな系に力学の法則が適用できると仮定したわけだが，その根拠はなんだろう？

力学は古く確立された物理の体系だが，それを信頼するためには，説得力のある実験的検証が必要だ．もちろん，地上での大小の物体の運動や太陽系の惑星の運動は素晴らしい精度でニュートン力学に従うことが確かめられている．しかし，そういった検証がおこなわれているのは，あくまで目に見える大きさの物体の運動にかぎられている．目にも見えず手で触れることもできない分子の運動がニュートン力学に従うということが直接に確かめられたことは一度もないし，どんなに技術が進もうと，マクロな系の中の無数の分子の運動を詳細に調べるのは（実際問題としても原理的にも）不可能である．

そう考えると，熱力学第一法則 (1) という経験事実のもつ意味合いは全く変わってくる．この経験則こそが，**マクロな系の無数の分子も力学法則に従っていると信じるための最初の経験的な証拠**と考えるべきなのである．

■ 5. 平衡系の統計力学—エントロピー ■

第一法則と力学的エネルギー保存則の相性がよかったことに励まされて，先に進もう．統計力学は，マクロな系がミクロな力学に従うことを全面的に仮定して，平衡状態のマクロな性質をミクロな力学にもとづいて再現することを目指す．

統計力学では，温度 T のかわりに逆温度と呼ばれるパラメター $\beta=(kT)^{-1}$ を用いる方が見通しがよい（$k\simeq 1.3806503\times 10^{-23}$ J/K はボルツマン定数と呼ばれる普遍定数）．以下では，T と β は必ずこの関係で結ばれているとする．

平衡統計力学によると，平衡状態 (T,V,N) の任意のマクロな性質を確率モデルで再現することができる．代表的な確率モデルである**カノニカル分布**では，ミクロな状態 Γ が確率密度

$$P(\Gamma)=\frac{e^{-\beta\,E(\Gamma)}}{Z(\beta)} \tag{6}$$

に比例して出現すると仮定する．

カノニカル分布 (6) が物理的に正しいと考えら

れる主要な理由は，それが熱力学の経験法則を再現するからである．既にみたように第一法則は単に力学を認めれば自動的に満たされる．よって第二法則との整合性が統計力学をつくっていく上で重要な役割を果たす．

カノニカル分布 (6) に対応するエントロピーを

$$S(T,V,N) = -k\int d\Gamma\, P(\Gamma)\,\log P(\Gamma) \quad (7)$$

と定義すると ($d\Gamma$ はすべての座標と運動量についての積分)，性質 (2), (3) が満たされる事が分かっている．(7) はギブスによる表式だが，後の情報理論のシャノンエントロピーと全く同じ形をしていることはきわめて興味深い．「確率分布がもっている情報の総量」と解釈できる量が，まさに熱力学におけるエントロピーと一致するのだ．

統計力学を用いれば，単に熱力学を再現できるだけでなく，多彩な物理系の平衡状態での様々な物理量を具体的に計算することもできる[3)]．その結果は見事に実験事実と一致することが長い歴史の中で確認されている．このような**平衡統計力学の成功は，「マクロな系もミクロな力学に従う」とした仮定を（間接的にではあるが）正当化するきわめて強い経験的な証拠**と考えることができる．

■ 6. 非平衡定常状態 ■

平衡系の物理学の成功をふまえて，未完成の非平衡の物理学の世界を覗いてみよう．

「非平衡」というのは「平衡にない」という意味であり，単に「平衡にない」状態すべてを考えても広すぎて何かが分かるとは思えない．ここでは「平衡にない状態」の中で，非平衡定常状態と呼ばれるもの（の一例）に話をしぼる．

図 2 のように，荷電粒子を含む熱力学的な系に電場 $\boldsymbol{E}$ をかけて，周期的境界条件（端に達すると反対側の端から出てくるということ）を課せば，電場から力を受けた粒子は，端に落ち着いてしまうことなく，ずっと運動し続ける．

系に電流が流れるとジュール熱が発生するから，このままでは系はたちまち灼熱してしまう．そこ

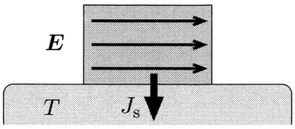


図 2　周期境界条件を課した系に一様な電場をかけると電流が流れ続ける．温度 T の環境に熱を逃がしてやれば，一定の時間の後に，マクロな時間変化はないが，マクロな流れのある非平衡定常状態が実現する．

で，系を温度 T の等温環境と接触させて熱を逃がすことにする．十分に長い時間が経てば，電場からの仕事と環境への放熱がうまくバランスし，**マクロな時間変化が観測されない状態**が実現するはずだ．ただし，ここには，**定常的な電流，電場からの定常的な仕事，環境への定常的な熱の流れという，マクロな流れが存在する**．これが**非平衡定常状態**の一例である．

■ 7. 非平衡定常系の熱力学 ■

さて，非平衡定常系について平衡系と同じような熱力学や統計力学がありうるだろうか？ この方向では線形応答理論をはじめとしたいくつかの重要な成果があるが，平衡系に匹敵する普遍的で強力な理論は全く得られていない．

平衡系の物理の出発点はマクロな経験事実に立脚した熱力学だった．第一法則と第二法則という二つの重要なポイントを手がかりにミクロな理論を模索することで統計力学が得られた．この教訓を非平衡定常系に活かしたい．

常にエネルギーが流れている非平衡定常系では第一法則の検証は困難だ．しかし，マクロな系も力学のエネルギー保存則を満たすことは平衡の物理でかなり確かになった．ここでは（厳しく考えれば，やや甘いが）非平衡定常系になってもエネルギー保存則はそのまま成立することを大前提にして話を進めよう．

ここでも鍵になるのは第二法則である．今の設定で断熱系は考えづらいので，等温準静操作についての平衡系の第二法則 (3) を手本にしよう．

非平衡系ならではの等温操作を考える．環境の温度 T と系の体積 V 物質量 N はすべて一定とする．はじめ電場は $\boldsymbol{E}$ に等しく系は定常状態にある．電場をゆっくりと $\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{E}'$ まで変化させ，それから十分に時間が経てば，系は $\boldsymbol{E}'$ に対応する新たな非平衡定常状態に落ち着くはずだ．

このときクラウジウス関係式 (3) がそのままの形で成り立たないのは以下の理由で明らかだ．非平衡定常状態では系から環境への一定した熱の流れがある．そのために，操作をしようがしまいが，移動する熱は常に時間に比例して増加していく．そのように時間とともに発散する量 Q が熱力学の関係式のなかに顔を出すはずはない．

大野とパニコニ[4]は，非平衡定常系ではいったいどのような熱力学が可能かを（いっさいミクロな理論を参照することなく）徹底的に考察した．そして，環境に逃げていった膨大な熱から定常的に流れる自明な熱を差し引くことで，操作の影響を反映する**過剰熱**を定義し，クラウジウス関係式における熱を過剰熱でおきかえた拡張クラウジウス関係式が成り立つだろうと提唱した．

過剰熱の定義をより詳しくみよう．電場が $\boldsymbol{E}$ のときの定常な熱流（単位時間あたりに熱として移動するエネルギー）を $J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E})$ とする（添え字の s は steady から）．まず簡単な場合を考え，時刻 $t=0$ に電場を急激に $\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{E}'$ に変化させるとしよう．時刻 t に系から環境に流れている熱流を $J(t)$ とする．操作の前には系は定常状態に達していたから，$t \le 0$ では $J(t)=J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E})$ である．また，操作の後に十分に時間が経てば系は新しい定常状態に達するから，t が十分に大きいときには $J(t)=J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}')$ である．図 3 のように，$t \ge 0$ において，熱流 $J(t)$ は初期値 $J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E})$ から定常値 $J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}')$ にむけて緩和していくだろう．この緩和の途中で「余分に」流れた熱，つまり，

$$Q_{\mathrm{ex}} = \int_0^\infty dt\,\{J(t) - J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}')\} \qquad (8)$$

を，この操作に伴う過剰熱と定義する．定常的に莫大な熱が流れていようと，このように定義した過剰熱は（時間に比例しない）有限の値をとる．

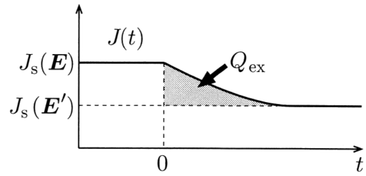


図 3　時刻 0 で電場が急に変化した際の熱流のグラフ．斜線部分は，変化の影響を受けて余分に環境に流れた熱，つまり過剰熱である．

より一般には，$t \le 0$ では一定だった電場を，$t \ge 0$ では連続的に時間変化させることを考える．時刻 t における電場を $\boldsymbol{E}(t)$ とし，過剰熱を

$$Q_{\mathrm{ex}} = \int_0^\infty dt\,\{J(t) - J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}(t))\} \qquad (9)$$

と定義する．$J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}(t))$ は時刻 t で（定常状態が実現されているなら）流れているべき熱流である．しかし，系が変化に追いつけないため実際の熱流 $J(t)$ は $J_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{E}(t))$ とは等しくない．両者の差の「余分な」熱流を積分したものが過剰熱である．

定常電流 J_{s} が常に 0 なら過剰熱 Q_{ex} は通常の熱 Q に一致する．非平衡定常系においてもマクロな観測量だけで閉じた熱力学関係式（あるいは，第二法則）が可能なら，それが Q_{ex} を使って書けるというのはもっともらしい．

■ 8. 非平衡定常系の熱力学—ミクロからマクロへ ■

ごく最近になって，われわれは大野とパニコニの予想した拡張クラウジウス関係式が電場の二次までの範囲で成立することを示した[5]．この熱力学関係式の導出の「論理」をみておこう．

われわれは，まず，図 2 の情況を素直に古典力学で実装した．荷電粒子に電場がかかった系と，それに接する大きな環境をともに多数の分子からなる古典力学的な系とする．初期状態では全系が温度 T のカノニカル分布に従うとする．そして，電場を $\boldsymbol{E}$ に固定したまま，全系を力学の運動方程式に従って十分に長いあいだ時間発展させ，非平衡定常状態をつくる．次に，電場をきわめてゆっくりと単調に $\boldsymbol{E}'$ まで変化させる．電場を $\boldsymbol{E}'$ に固定してしばらく時間が経てば，系は新たな非平

衡定常状態に達するだろう．このプロセスにおける過剰熱を (9) のように定義する．

もちろん，多くの分子からなる系でのこのような複雑な時間発展の解をあからさまに求めることなどできない．しかし，何らかの一般的な関係を示すことはできる．われわれは非平衡定常状態におけるエントロピー $S(T, V, N, \boldsymbol{E})$ を定義し，上の操作において

$$S(T, V, N, \boldsymbol{E}) - S(T, V, N, \boldsymbol{E}') = Q_{\mathrm{ex}}/T + O(E^3) \quad (10)$$

という**非平衡定常系における拡張クラウジウス関係式**が成り立つことを示したのである[5]．

つまり**非平衡定常系においても，（電場が十分に小さければ）平衡系と類似した熱力学関係式が成立する**のだ．決して強い結果ではないが，非平衡定常系において平衡系と類似した熱力学・統計力学の体系を構築するという「二十一世紀の夢」に向けたささやかな半歩ではありうるだろう．

■ 9．非平衡定常系—マクロから再びミクロへ ■

平衡系での厳しく美しい論理と対比させると，非平衡定常系の熱力学関係式 (10) の導出には色々と不満が残る．

そもそもクラウジウス関係式は熱力学の関係だから，平衡系にならうなら，(10) は（ミクロな力学などを持ちださず）実験で確立すべきである．だが，残念なことに，非平衡定常系での熱力学関係式の実験での確認は困難であり，現状では，ミクロな力学に頼るのが唯一の道（あるいは数少ない道の一つ）なのである．

さらに，カノニカル分布と時間発展を組み合わせて非平衡定常状態を作ったところにも反省がいる．平衡統計力学のそもそもの目的は平衡状態のマクロな性質を再現することだった．その点について平衡統計力学が有効なことは無数の実験で確かめられている．しかし，非平衡定常状態を作るための出発点としてカノニカル分布を使うことが経験的に正当化されているとは言い切れない．きわめて厳しく考えれば，このような理論構築にも論理の甘さがある．

このように，平衡系の熱力学，平衡系の統計力学，そして，非平衡定常系の熱力学と話が進んで来るにつれ，経験科学としての基礎付けの「論理」が次第にゆるくなってきていることが分かるだろう．これは憂うべきことであろうが，だからといって，完璧な経験的実証がでそろうまでは物理を進めないという態度に凝り固まると，もはや進歩は望めない．われわれが取りうる最良の方法は，経験的基盤が足りないことを自覚しながら（そして，それを改善する事も常に考えながら）理論としての整合性のより高い体系を模索していくことだろう．非平衡定常系の物理についていえば，**ミクロな力学をもとに正当化したマクロな関係式を携えて，ミクロな統計理論を見いだすことを目指すのが次の（全く未解決の）課題**に違いない．

われわれは，(10) に登場する非平衡エントロピーが，非平衡定常状態のミクロな確率分布を使って

$$S(T, V, N, \boldsymbol{E}) = -k \int d\Gamma \, P(\Gamma) \log \sqrt{P(\Gamma) \, P(\Gamma^*)} \quad (11)$$

と書けることも見いだしている（Γ^* は Γ の運動量をすべて反転したもの）．ギブスやシャノンのエントロピー (7) に似た示唆的な表式だが，その真の意味をわれわれは未だ理解していない．もしかしたら，このような関係を突き詰めることで，ミクロとマクロを結ぶ新たな「論理」を見いだすことができるのではないかと夢見ながら（ほとんどの場合，夢は夢のままで終わるのだろうが）われわれは模索を続けている．

参考文献

1) 佐々真一「熱力学の基礎概念—エントロピーをめぐって」本誌 2008 年 7 月号では，類似のテーマを異なった角度から解説している．
2) 田崎晴明『熱力学：現代的な視点から』（培風館）．
3) 田崎晴明『統計力学』（培風館，2009 年出版予定）．
4) Y. Oono and M. Paniconi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130**, 29 (1998).
5) T.S. Komatsu, N. Nakagawa, S. Sasa and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 230602 (2008).

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

Maxwellのデーモンと情報熱力学

沙川 貴大・上田 正仁

1. はじめに：情報は物理的

情報は，それを蓄えるメモリ媒体に依存しない抽象的なものである．だからこそ，ウェブサーバにある情報も，光ファイバを伝わる情報も，パソコンのハードディスクに読み込まれた情報も，等価な情報と見なすことができる．情報そのものは電子や光などそれを表現する媒体とは独立に存在できる．

しかし，情報には必ず，それを実装する物理的な実体が必要である．電子や光などの物理的媒体の助けを借りることなく情報を蓄えたり送信したりすることはできない．個々の情報処理は，煎じ詰めれば物理過程なのだ．この一見自明な事実の意味するところは，実は深刻である．なぜならこれは，情報という抽象的なものを処理する上で，物理法則による制約が避けられないことを意味するからである．その一方，物理法則を積極的に活用することで，夢のような情報処理を実現する可能性も開ける．実際，量子情報科学においては，量子論特有の性質をフル活用することで，古典的には実行不可能な情報処理を実現できる[1)]．情報と物理媒体，そして情報処理と物理法則の間には，不可分な関係があるのだ．Landauer はこの事情を象徴的に “Information is physical.” と表現した．

本稿のテーマである情報と熱力学の関係は，熱力学的自然認識において本質的であるばかりではなく，量子制御などミクロなスケールの工学的応用においても重要性が増してきている．図 1 に示すように，情報の熱力学——“情報熱力学” ——は量子の世界も含めて様々な研究分野と関係しており，今後研究の裾野が拡大するものと期待される．本稿ではその一端を紹介する．

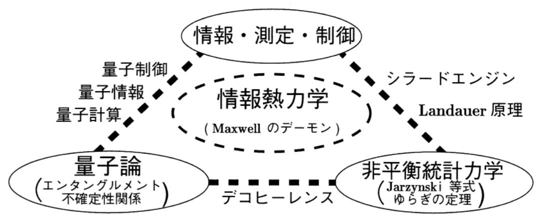


図 1　本稿で取り上げる内容の相互関係を表す模式図．情報熱力学は 3 つの領域が交わるところに位置する．Maxwell のデーモンはその中心的役割を果たす．

2. 熱力学と情報

熱力学においては，エネルギーの移動の形態は 2 種類ある．マクロな自由度を介したエネルギーの移動（すなわち力学的な仕事）と，着目している系と環境のミクロな自由度間のエネルギーの移動（すなわち熱）である．例えばピストンに入った気体分子の場合だと，マクロな自由度はピストンの壁の重心座標，ミクロな自由度は個々の気体分子の相対座標である．熱力学第二法則によれば，エネルギー移動の熱と仕事への配分の仕方には，系の詳細によらない普遍的な制約がある：

$$W_{\mathrm{ext}} \leq -\Delta F. \quad (1)$$

ここで W_{ext} は熱機関から取り出した仕事，ΔF はその際の Helmholtz 自由エネルギーの変化である．(1) は任意の等温過程で成り立つ不等式である．例えば等温サイクルの場合は $\Delta F = 0$ なので，(1) は第二種永久機関が存在しないことを意味する．ここで (1) が不等式であることが重要だ．これは，うまくやれば（つまり準静的に熱機関を操作すれば）取り出せるはずの仕事も，下手をすれば取り出せなくなってしまうことを意味している．取り出せなくなる理由は，マクロな自由度を通じて取り出そうとしたエネルギーがミクロな自由度に逃げてしまい，不可逆な散逸が起こるからである．このように，エネルギーの担い手である自由度を 2 つの階層に分けて捉えることが熱力学の特徴である．

さて，伝統的なマクロ系の熱力学系においては，「マクロ/ミクロ」という区別と，「アクセス可能/不可能」という区別は，実質的に等価である．例えば，気体分子の相対座標にアクセスする（すなわち，それについての情報を得て制御する）ことが実質的に不可能な理由は，それがミクロだからであるというのが伝統的な熱力学の立場である．「アクセス可能/不可能」という観点からすると，不可逆な過程とは，アクセス可能な自由度からアクセス不可能な自由度にエネルギーが散逸するプロセスを意味している．しかし，もしもミクロな自由度にもアクセスできれば，散逸したものを元の状態に戻すことができるのではないだろうか．

例えば，比喩的な例として，「覆水盆に返らず」という箴言がある．これを字義どおりに解釈すれば，盆から床への水の散逸が不可逆であることを述べている．しかし，もしも床にこぼれた水を一滴残らず回収することができれば，覆水を盆に返せる――水がひとりでに盆に戻ることはないにしても．つまり，もしもこぼれた水のすべてにアクセスできれば，水の散逸は，逆向きの操作を実行できるという意味で可逆になる．このことは一般的に

$$\text{アクセス可能/不可能} \Leftrightarrow \text{可逆/不可逆} \quad (2)$$

と表現することができるだろう．つまり，「アクセス可能/不可能」の境界を移動することができれば，「可逆/不可逆」の境界を移動することができる．

そしてその両者の間を移動することができる存在が，Maxwell が考えた“デーモン”に他ならない．デーモンは，アクセス可能な自由度と不可能な自由度の間のインターフェースの役割を果たす．この観点こそが，次節で詳しく議論するように，熱力学と情報を結びつける鍵なのだ．実際，ある自由度にアクセスするためには，その自由度についての情報を得ることが必要であり，得た情報に応じてその自由度を制御することができる．先ほどの譬えで言えば，こぼれた水の位置を知った分だけ盆に返せるということになる．

「マクロ/ミクロ」は系の物理的スケールに関する概念であるのに対し，「アクセス可能/不可能」は情報論的な概念である．そして後者こそが熱力学第二法則における不可逆性の本質と結びついている．

3. シラードエンジン

Maxwell のデーモンの機能の本質を見事にモデル化しているのは，シラード (Szilard) エンジンである．このモデルでは，デーモンは気体分子の位置を測定してその情報を得ることで，通常の熱力学では不可能とされる操作――不可逆過程を逆行する操作――を実行する．そしてそのことによって，第二法則 (1) の上限よりも多くの仕事が取り出され，しかもその仕事量は得た情報量に比例している．

シラードエンジンとは以下のような熱機関である．箱の中に入った 1 分子理想気体を考える（図 2 参照）．これは温度 T の熱浴と接触しており，箱の壁は透熱壁とする．(a) 最初，気体分子は熱平衡状態にあり，箱の中をランダムに飛び回っている．(b) 箱の中央に（厚さの無視できる）仕切りを入れ，箱を 2 つに分ける．その結果，分子は等確率で左右どちらかの箱に入るが，どちらに入るかは分からない．(c) ここでデーモンが登場し，どちらの箱に分子が入っているかを測定する．このときデーモンは，ちょうど 1 ビット（自然対数で $\ln 2$ ナット）の情報を得る．(d) 次にデーモンは，右側の箱に分子が入っていたときには，それを準

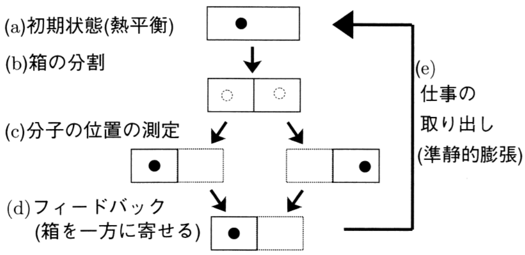


図 2　シラードエンジンの模式図.

静的に左に寄せる（理想的には，この操作は仕事を必要としない）. 左側の箱に入っていたときは何もしない. こうすると，デーモンの登場前と比べて箱の体積がちょうど半分になっていて，しかも測定結果に依存しない状態になっている. (e) 最後に箱を準静的に膨張させ，最初の大きさに戻す. このとき，分子が箱の壁を押すことで外部にする仕事は $k_{\rm B}T\ln 2$ になる（$k_{\rm B}$ はボルツマン定数）.

以上の過程において，一見すると，等温サイクルであるにも関わらず（すなわち，シラードエンジンの始状態と終状態が同じであるにも関わらず）正の仕事 $k_{\rm B}T\ln 2$ を取り出せている. したがってデーモンは，熱力学第二法則 (1) と矛盾しているように見える. これは熱力学第二法則の根幹に関わるパラドックスであり，多くの議論を巻き起こしてきた[2].

現在では，デーモンは熱力学第二法則と矛盾しない——すなわち物理法則はデーモンの存在を許容している——と考えられている. 現在一般的に受け入れられているパラドックスの解決策は Bennett によるものである. いわゆる Landauer の原理によると，デーモンが測定で得てメモリに蓄えた情報を消去する（つまり，デーモンのメモリを初期化する）ときに，必ず $k_{\rm B}T\ln 2$ 以上の熱が散逸し，それと同量の仕事が必要である. この仕事がシラードエンジンから取り出した仕事を打ち消してしまい，エンジンとデーモンを合わせたサイクルからは正の仕事を取り出せないというのが Bennett のロジックである[*1].

そこで，改めてシラードエンジンを振り返ってみると，デーモンはエンジンから 1 ビット（ln 2 ナット）の情報を得て，それを使ってエンジンを操作することで，結果的に通常の熱力学の制約 (1) よりも $k_{\rm B}T\ln 2$ だけ多くの仕事を取り出している. これを標語的に言えば，

$$1\,\text{ビットの情報} \Leftrightarrow k_{\rm B}T\ln 2\,\text{の仕事} \qquad (3)$$

ということになる. つまり，1 ビット情報は $k_{\rm B}T\ln 2$ の仕事のリソースとしての役割を果たしているのだ.

シラードエンジンにおける図 2 の (b) から (d) までの過程は，ちょうど自由膨張（拡散）の逆になっていることに注意しよう. 仕事なしで気体の体積が 2 倍になる自由膨張のちょうど逆の操作，つまり仕事なしで体積を 1/2 にする操作を，デーモンは行っている——自由膨張は本来不可逆であるにも関わらず，である. デーモンは，情報を得てそれを使って制御を行うことで，不可逆過程の逆過程を可能にしたことになる. このようにシラードエンジンは，(2) に示されたアクセス（不）可能性と（不）可逆性の同等性の好例となっている.

4. 微小系の非平衡統計力学

シラードエンジンは思考実験上のミクロな熱機関である. 一方で近年，高分子 1 個や微小ビーズのようにミクロな（あるいはメソスコピックな）熱力学系を，実際に測定・制御する技術が発達している. 例えば DNA 1 分子をレーザーで制御して（例えば一端を固定してもう一方の端を引っ張って），$k_{\rm B}T$ のオーダーの微小な仕事を測定し，DNA 分子 1 個の自由エネルギーを知ることができる.

このような微小な熱力学系においては，「マクロ/ミクロ」という区別はあまり意味がなく，「アクセス可能/不可能」という区別が本質的に重要である. というのも，このような系においては，関連するすべての自由度がそもそもマクロではないからだ. DNA を例にとると，アクセス可能な自由度とは DNA 鎖の長さ，不可能な自由度とは DNA を構成する個々の原子の相対座標である.

*1）本稿の著者は必ずしもこれに同意してはいない. しかし，このことは以下の議論の本筋には影響しない.

ところで，19 世紀以来，マクロ系の熱力学は経験則として揺るぎない地位を確立してきた．しかし最近になって微小系も熱力学的に扱えるようになった．そもそもこのような微小系でもマクロ系と同じ熱力学が成り立つかどうかは，実は自明なことではない．一つの問題は，微小系においても（デーモンがいなければ）熱力学第二法則 (1) が成り立つか否かということである——もしも成り立たないのであれば，デーモンによる第二法則の破れを 1 分子気体で議論することの意味を，再考する必要が生じるだろう．

1990 年代以降の非平衡統計力学の発展により，微小系における熱力学第二法則のあるべき姿が明らかになってきた．その重要な成果の一つは，熱力学第二法則がわずかな確率で破れることを明らかにし，その確率を決定したことである．それを見るために，(1) の両辺の差を温度で割った量を導入し，$\sigma \equiv (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}(-\Delta F - W_{\mathrm{ext}})$ とおこう．σ はエントロピー生成という意味をもっている．これが負の値 $-\sigma$ になる確率 $\mathrm{Pr}(-\sigma)$ は，正の値 $+\sigma$ になる確率 $\mathrm{Pr}(+\sigma)$ よりも，およそ $e^{-\sigma}$ だけ小さい*2)：

$$\mathrm{Pr}(-\sigma) \approx \mathrm{Pr}(+\sigma)e^{-\sigma}. \tag{4}$$

マクロな系では σ がアボガドロ数のオーダーになるため $e^{-\sigma}$ は事実上ゼロになり，エントロピー生成が負になる場合は実際には観測できない．しかし微小系では，エントロピー生成が負になる場合が実験で観測され，その確率は理論の予言と一致した．(4) のタイプの等式はゆらぎの定理（fluctuation theorem）と呼ばれている[3]．それは平衡から遠く離れた系でも系の詳細によらず普遍的に成り立つという著しい性質を持っている．

ところで，上述のように，エントロピー生成が負になる確率は非常に小さい．そのため，あらゆる場合についての平均を考えると，平均エントロピー生成は正になることが証明できる．この意味においては，熱力学第二法則は，微小系でも成立する——不等式 (1) は，微小系でも，デーモンが存在しなければ期待値の意味では決して破れないのだ．

結局，デーモンが伝統的な熱力学第二法則を破るということの本当の意味は，可能なすべての場合についての期待値で比較してもなお (1) よりも多くの仕事を取り出せるということである．それゆえ，デーモンによる第二法則の破れは，ゆらぎの定理が主張する確率的破れとは，物理的起源が異なる．情報が関わっているのは前者だ．

なお，微小系における $k_{\mathrm{B}}T$ のオーダーの仕事は，デーモンがシラードエンジンから取り出せる仕事と同じオーダーである．微小な熱力学系において，デーモンを実験的に実現・検証する可能性が開かれつつある．それは，情報や制御といった概念を取り込んだ微小系の熱力学を構築するための一歩となるかもしれない．

5. 量子デーモン

さて，4 節までは古典系の話であったが，次に量子系におけるデーモンを議論する．量子デーモンは，古典デーモンに類似の，あるいは量子系に特有の，様々な性質をもっている．例えば，古典デーモンが熱ゆらぎを小さくすることと対応して，量子デーモンは量子ゆらぎを小さくすることができる．

ここでは原子集団のスピンを操作する量子デーモンを考えよう（図 3 を参照）．最初，原子集団のスピンは z 方向に偏極して，$\hat{S}_z|\phi\rangle = \hbar S|\phi\rangle$ を満たす量子状態 $|\phi\rangle$ にあるとする（S はスピンの大きさ）．これに対して，以下のようにして，原子スピンの x 方向成分 $\hat{S}_x$ のゆらぎを小さくすることを考える（これはスピン・スクイジングと呼ばれる）．まず $\hat{S}_x$ を量子測定すると，量子測定に伴う波動関数の収縮により，測定値の付近にゆらぎが集中する．正の測定値（$S_x > 0$）が出たときは，磁場をかけて反時計回りにスピンを回し，中央に持ってくる．逆に負の測定値（$S_x < 0$）が出たときは，時計回りにスピンを回し，やはり中央に持ってくる．ここで測定結果に依存した操作を行っていることに注意しよう．この操作によって，スピ

*2) これを正確に述べるには，時間反転したミクロな経路を導入し，経路ごとのエントロピー生成を定義する必要があるが，本稿では省略する．

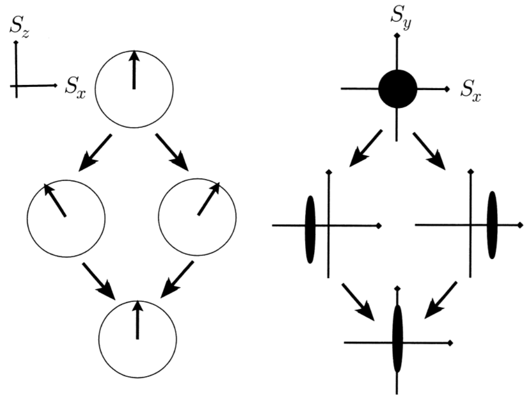


図 3　量子デーモン（量子フィードバック制御）によるスピン・スクイジングの模式図．左側の図は S_x–S_z 平面で見たスピンの平均的な方向を，右側の図は S_x–S_y 平面で見たスピンの量子ゆらぎを表している．

ンの平均的な位置を変化させずに，その $\hat{S}_x$ 成分のゆらぎをせばめることができる．

ところで，量子力学においては不確定性原理が存在する——いまの場合は $\Delta S_x \Delta S_y \geq \hbar S/2$ である．そのため，$\hat{S}_x$ のゆらぎを小さくした代償として，$\hat{S}_y$ のゆらぎは広がってしまう．これは，量子測定によって系が不可避に撹乱されたことの結果であるとも理解できる．このような測定の反作用は，量子デーモンに特有の効果である．

シラードエンジンの場合を思い出すと，分子が右にあれば左によせることで，デーモンは熱ゆらぎの幅（箱の左右の幅）を小さくしていた．図 2 と図 3 を比較すると，量子デーモンはこれと本質的に同じ操作を量子的に行っていることがわかる．実は上記の量子デーモンは，「量子フィードバック制御（quantum feedback control）」のシンプルな例になっている．量子フィードバック制御は，古典的な制御工学の量子系への拡張として Belavkin によって 1980 年ごろに提唱され，量子系を制御するための重要な手法として近年注目を集めるようになってきた．量子フィードバック制御の特徴は，所望の非ユニタリー操作を高い精度で実行できることである（一方，フィードバックを使わなければ，非ユニタリーな操作は確率的にしか成功しない）．スピン・スクイジングの例からわかるように，量子デーモンはまず対象とする系に対して量子測定を行う．そしてその測定結果に依存した量子操作を行う．ここで「測定結果に依存した」というところが，フィードバック制御たる所以である．

本節では量子フィードバック制御を中心に扱ったが，他にも量子情報科学とデーモンの交流は深まっている[4]．

6. 情報熱力学の第二法則

最後に，デーモンによる操作を含んだ形に一般化された熱力学第二法則を紹介する．デーモンが熱力学系に対して測定を行い，測定結果 k を確率 p_k で得て，その結果を使って，（k に依存する）フィードバック制御を行ったとする．このような状況でデーモンが系から取り出せる仕事が熱力学第二法則 (1) を超え得るということはシラード以来知られていたが，最近その上限が決定された．それは

$$W_{\rm ext} \leq -\Delta F + k_{\rm B} T I \qquad (5)$$

という不等式で与えられる[5]．ここで I は測定でデーモンが得た相互情報量であり*3)，その上限は Shannon 情報量 $H \equiv -\sum_k p_k \ln p_k$ で与えられる $(0 \leq I \leq H)$[6]．$I = H$ は測定に誤差がない場合，$I = 0$ となるのは測定しても情報が得られない場合に相当している．不等式 (5) の等号は，操作が準静的で，かつフィードバック後の状態が測定結果 k に依存しないときに成立する．シラードエンジンはこの条件を満たしている．実際，$I = H = \ln 2$ なので，シラードエンジンは等号を達成していることが分かる．この古くから知られていたデーモンのモデルは，実は最大限の能力を持ったデーモンだったのである．この意味において，情報と仕事を結びつける (3) の関係が，（シラードエンジン以外の）一般的な状況でも，定量的に確立されたことになる．

古典的な熱機関は熱の一部を仕事に変換し，可逆なカルノーサイクルがその変換効率の上限を達

*3)　測定が量子的な場合は，一般化された相互情報量になる．

成する．これに対して，デーモンが操作する熱機関は，情報を仕事に変換するいわば情報熱機関である．シラードエンジンはその変換効率の上限を達成するという意味で，古典的な熱機関におけるカルノーサイクルと同様の，基本的な役割を果たしていると言える．

通常の熱力学では,「ここで測定とフィードバックをしましょう」という状況は想定しない．もしそのようなセットアップを考えるなら，熱力学第二法則 (1) を (5) に変更する必要が生じる．実際，不等式 (5) は，熱力学第二法則 (1) を，情報を表す変数 I を明示的に含む形に一般化したものになっている．かつてはパラドックスの元凶だと思われていたデーモンは，実は，情報熱力学の第二法則とも呼ぶべき (5) の立役者だったのである．

7. おわりに

情報熱力学においては，デーモンはもはやパラドックスの元凶ではなく，ミクロな世界における情報処理の「デバイス」としての機能を果たす．デーモンは情報を利用することで従来の熱力学第二法則 (1) を破る操作も実行でき，さらにまた，私たちが熱力学第二法則の基礎を深く理解する一助にもなるはずだ．それはあたかも古代ギリシアの daemon のように，アクセス可能な世界と不可能な世界の境界に立っている．

本稿で見てきたように，情報熱力学は，物理学だけでなく，情報理論や制御工学といった，様々な分野との関連を持っている．一般化された第二法則 (5) は，情報と熱力学が交わる広大な世界のごく一端を示しているに過ぎないと思われる．情報の物理学はまだ始まったばかりである．

参考文献

1) 量子測定・計算・情報の標準的な入門書として M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
2) Maxwell のデーモンについて，古典から比較的最近の発展までを包括した論文集は，H.S. Leff, and A.F. Rex, (eds.), *Maxwell's demon 2: Entropy, Classical and Quantum Information, Computing* (Princeton University Press, New Jersey, 2003).
3) このテーマについてのレビューは C. Bustamante, J. Liphardt, F. Ritort, arXiv: cond-mat/0511629 (2005).
4) このテーマについてのレビューは K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, arXiv: 0707.3400 (2007).
5) T. Sagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080403 (2008).
6) 古典情報理論についての標準的な入門書として T.M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information theory* (John Wiley and Sons, 1991).

（さがわ・たかひろ，東京大学大学院理学系研究科）
（うえだ・まさひと，東京大学大学院理学系研究科）

量子力学の論理

小澤　正直

1. はじめに

1936年にバーコフとフォン・ノイマンは「量子力学の論理（The logic of quantum mechanics）」という論文[1]を著して，量子力学の論理とは何かという問題を論じている．

論理学というのは，本来，個々の対象の特殊性によらずに正しい判断を得るための一般的な基準を与える学問であると考えられている．それならば，「物理学の論理学」と「数学の論理学」の間に区別を立て，それぞれ独自の論理学を考えるなどということは，論理学の本質を見誤ったものではないかという考えが浮かぶ．

しかし，一度，量子力学を学んでみると，そのような建前は無力に思える．不確定性原理と相補性原理は，量子力学で扱うあらゆる対象が従わなければならない根本原理であり，物理学者ならこれを受け入れない限り，量子力学的対象に関する経験を他の物理学者に言葉にして伝えることはできない．ところが，そのことは，これまで慣れ親しんできた「論理」と矛盾するように感じられる．

例えば，ある対象が，X, Y という 2 つの量を持っているとし，X も Y も 0 か 1 のいずれかの値を持つとする．すると，通常は，X と Y の組は，$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ の 4 通りの値の組のどれかを持つと判断される．ところが，対象が量子力学的対象で，更に，X と Y という 2 つの量が互いに相補的な量ならば，どの値の組も持ち得ないと判断しなくてはならない[*1]．

こういう事態を認めても，なおかつ，やはりそれは「論理」の問題ではなく，対象が持つ「量」の問題であるから，量子力学に固有の論理を認める必要はないという考え方もあるであろう．しかし，「量」の問題が「論理」の問題と独立かどうかは，数学の基礎に関する哲学的立場にも関わる深い洞察を必要とする問題で，それほど明白なことではない．

本稿では，まず，数学において，「数」は「論理」から派生するという考え方を調べてみよう．その結果，論理式の外延を意味する「集合」が「論理」に関する規則や公理だけから定義可能かどうかは非常に微妙な問題であるが，「実数」が「集合論」の内部で定義されるので，少なくとも，「数」は「集合」から派生することがわかる．次に，バーコフとフォン・ノイマンに従って，「古典力学の論理」と「量子力学の論理」を調べよう．数学の論理が 2 値論理であるのと対照的に，これらは多値論理であって，「古典力学の論理」はブール代数に真理値を持つ論理であり，「量子力学の論理」はオーソモジュラー束と呼ばれる構造に真理値をもつ論理である．

バーコフとフォン・ノイマンの時代には知られていなかったことであるが，興味深いことに，これらの「論理」に基づいた「集合論」を展開することができ，その「集合論」で「実数」を定義することができる[2]．すると，「古典力学的物理量」はちょうど「古典力学の論理」に基づいた「集合論」で定義された「実数」のことであり，「量子力学的物理量」はちょうど「量子力学の論理」に基づいた「集合論」で定義された「実数」のことであるということがわかる．このことは，「量子論理」というものがあるという見方に有力な根拠を与えるだけでなく，「量子論理の集合論」があり，そこで展開される「量子論理の数学」があるということになり，「量子力学」はそこに含まれる「量子論理の実数論」に

---

*1）　例えば，ある質点の位置がある座標系に対して負ならば，$X = 0$，非負ならば，$X = 1$，運動量が負ならば，$Y = 0$，非負ならば，$Y = 1$ と定義される量 X, Y について成り立つ．

対応する．

これらのことから，論理法則は経験によって定められ[3]，対象固有の論理というものが存在し，われわれが古来持ち続けてきた対象が所有する量の概念は，その対象固有の論理に基づく実数論という形で自動的に定まるという一般的見解[4]を導くことができる．このとき，これまでの「数学の論理」である 2 値論理は，それらの対象固有の論理の構造と真理性を調べる「メタ理論の論理」としての特権的地位を維持することができる．

このような見方の数学的利点は，これまで数学者が論理から数学を構成するために培ってきた理論的方法をそのまま形式的に対象固有の論理に適用することができるということである．従来の数学者の仕事の多くは，その部分をアナロジー*2)という数学的想像力に基づく試行錯誤に頼っていたのであるが，これからは，論理の変更による形式的移行原理*3)という有力なアプローチが可能になった[9]．

紙数の関係でこのようなアプローチが，実際に，量子力学の問題解決に役立っている場面の解説に立ち入ることができないのは，残念であるが，これまで不確定性原理や相補性原理の下で概念規定が困難な問題に対して，「量子論理の実数論」に基づいて，量子力学の解釈を自然に拡大して，適切な理論を提供することができるようになった[9,10]．

2. ライプニッツからフレーゲへ

論理学は，ギリシャ時代の弁論術に端を発し，アリストテレスが三段論法などの推論形式を体系化したことが，術を脱して，学の始まりになったとされている．18 世紀にカントは，論理学はアリストテレスの時代で完成されてしまい，それ以後，後退もなければ，進歩もなかったと書いている．ところが，17 世紀にすでにライプニッツによって，計算的論理体系（calculus ratiocinator）を内包する形式言語（characteristica universalis）による科学の普遍的記述という構想が明らかにされている．

よく知られているように，ライプニッツの構想を実現する最初の本格的な仕事は，19 世紀になって，ブールによってなされた．ブールの発見に基づく記号論理学の体系は，命題論理と呼ばれている．これはアリストテレスの論理学を大きく一般化したが，これだけでは，例えば，ギリシャ時代の数学を体系化したユークリッドの『原論』の証明を分析することさえできない．

ほとんどの数学者は，現代数学は ZFC 集合論*4)によって基礎づけられているという考え[11,12]を受け入れている．例えば，数も関数も構造を持った空間も，それぞれがある論理式で規定される集合として定義され，数学で許される証明はすべて，定義を遡れば，集合に関する集合論の証明に書き換え可能でなければならない．このように数学全体を集合論で基礎づけるという考え方は，そもそも，数学全体を論理学から導出するというフレーゲの構想を出発点としている．そのためにフレーゲが発見した論理体系が述語論理である．これが，数学においてライプニッツの構想を実現するための決定的な役割を果たした．

素朴な立場では，ある条件が与えられると，その条件を満たすものの全体（外延）は，一つの集合をなすと考えられる．条件というのは，変数をもつ論理式（述語）で書かれるから，すべての述語の外延が集合をなすと言ってもいい．この主張は，内包公理と呼ばれている．逆に，すべての集合はある述語*5)の外延と考えられるから，集合は完全に述語と対応する．従って，数学が集合論によって基礎づけられるということは，内包公理の下では，数学が述語論理という論理学から派生するということを意味する．数学の基礎に関するこの考え方を論理主義と呼ぶ．

フレーゲは，論理主義のプログラムを実行して，述語論理および内包公理に相当する述語の外延に関する簡単な公理から算術の厳密な体系を導くことを試みた．しかし，不幸なことに，フレーゲの体系がまさに完成し，出版される直前になって，ラッセルは，有名なパラドックスにより，フレーゲの公理系から矛盾が導かれることを発見した．

3. 論理主義と形式主義

ラッセルのパラドックスから，内包公理の無制限な適用を禁止する必要性が明らかになった．ホワイトヘッドとラッセルは，高階述語論理における型の理論によっ

*2） 例えば，作用素環論は非可換な「論理」における数論であるという見方はアナロジーとして定着していた．

*3） この方法は，これまで超準解析学[5,6]およびブール代数値解析学[7,8]で確立されてきた．

*4） ツェルメロ・フレンケルの公理系に選択公理を加えた公理系を持つ集合論．

*5） 例えば，その集合の元であるという述語．

て内包公理を適用する述語を秩序化するという方法で，集合概念を論理概念に帰着させ，そこから数学が派生することを示した．一方，一階述語論理で集合論を公理化し，とりわけ，述語から集合を生成する際に，条件を満たす個体の領域のサイズが大きくならないように制限することによって，集合論の整合性を保持するという考え方に立って，ZFC 集合論の公理系が生まれた．

今日，型の理論には論理主義，ZFC 集合論には形式主義，というように数学の基礎に関する異なった哲学があてがわれている．論理主義に対しては，型の理論で集合概念が完全に論理に還元されたかに疑問が残され，形式主義では，ゲーデルの不完全性定理により，ZFC 集合論の整合性の証明がヒルベルトのプログラム[*6)]に従う立場では実行できないことが明らかになったため，いずれの哲学的立場も挫折したと評価されることが多い．

しかし，既に，ZFC 集合論により安定した数学の基礎が得られ[*7)]，多くの数学者が数学内部の基礎的な構造から，広く経験科学との接点に関心を移しつつある今日，集合論と論理学の隙間に過大な関心を払い，歴史の否定的側面を強調することに大きな意義を見出すことはできない．むしろ，集合論という単純な言語のもつ表現力の驚くべき豊穣さにこそ，歴史の到達点を見るべきであろう．

以上に述べた経緯により，数学の普遍言語と論理に関して，今日ではある一定の見方が可能であろう．つまり，論理主義と形式主義の挫折と語られる歴史は，見方を変えれば，ライプニッツの普遍言語を数学において実現した輝かしい成功の歴史と見られるであろう．つまり，数学の普遍言語とは，ZFC 集合論であり，そこに含まれる論理は，古典述語論理である．そして，集合論と古典述語論理の隙間は限りなく狭い．

*6) ヒルベルトは，数学の統一的体系を述語論理に基づく形式言語で表現し，その無矛盾性を有限の立場に基づく数学的方法で証明することにより，数学の無矛盾性を保証するプログラムを提唱した．

*7) 不完全性定理から，ZFC 集合論の無矛盾性証明をこの体系内の証明で完結させることはできないが，どのような上位の原理が証明に必要かを調べることにより，無矛盾性に対する信頼を高めていくというプログラムが存在する．算術と解析学の無矛盾性に対してゲンツェンと竹内外史が開発した証明論の方法を発展させて，ある理想的な順序数までの超限帰納法という上位の原理を仮定すれば，証明図の構造による視覚的な筋書きの無矛盾性証明が与えられることが新井敏康の最近の研究で明らかにされている．

それでは，物理学の普遍言語とその論理とは何であろうか．以下では，この問題を考えてみよう．

4. 古典力学の論理

バーコフとフォン・ノイマンは，量子力学の論理を考えるに先立って，古典力学の論理とは何かという問いを考察している．興味深いことに，その結論は，論理のシンタクスとセマンティクスという 2 面性を浮き彫りにしている．

われわれが，数学の論理は古典述語論理であると述べるとき，これは往々にして，数学の証明で許される推論の規則が何であるかという数学の論理のシンタクスについて述べている．しかし，同時に，数学の論理のセマンティクスに関しては，すべての閉論理式（命題）は真か偽という 2 値の真理値を持つ 2 値論理であると考えている．論理学の教科書を見ると，この 2 つの見方の整合性は，ゲーデルの完全性定理によって保証されるという理論構造になっている．つまり，述語論理の言語で記述されるすべての命題は，任意の 2 値解釈において，真か偽のどちらかに真理値が定まっていて，その論理式が述語論理で証明可能であることと，それがすべての 2 値解釈において真であることが同等であることが証明されている．

バーコフとフォン・ノイマンの結論は，古典力学の論理のセマンティクスは，2 値論理ではなくブール代数値の論理であるということである．つまり，一つの古典力学系には，一つのブール代数が対応して，その古典力学系の観測可能な性質に関するすべての命題（観測命題）は，そのブール代数の元を真理値として持つ．ただし，バーコフとフォン・ノイマンが論理と呼んだのは，命題論理の範囲に限られていた．

バーコフとフォン・ノイマンによれば，古典力学の論理は，次のように説明される．

CM1. 古典力学系 **S** の各観測命題の真理値は，系 **S** の相空間 Ω のボレル集合で表現される．ただし，ルベーグ測度零集合の上で異なる 2 つのボレル集合は同一視される．

CM2. 系の物理量は Ω 上のボレル関数で表現され，「物理量 A の値が区間 Δ に属する」という観測命題（原子観測命題）の真理値は，ボレル集合 $A^{-1}(\Delta)$ に対応する．

CM3. 系の状態は Ω 上の確率密度関数で表現され，

観測命題の真理値がボレル集合 Γ に対応するとき，状態 ρ でその観測命題が観測される確率は，$\int_\Gamma \rho(\omega)\,d\omega$ である．

一般の観測命題は，原子観測命題から，それらの否定（$\neg$），連言（$\wedge$），選言（$\vee$），条件文（$\rightarrow$）を順次構成することにより得られ，それらの真理値は，対応するブール演算によって定まる．

以上のように，古典力学の観測命題の真理値の全体は，完備ブール代数になるが，更に，これは非原子的で加算生成元を持ち，忠実な確率測度を持つ．逆に，忠実な確率測度を持つ非原子的加算生成な完備ブール代数は，古典力学系の観測命題の真理値の全体と同形である．

5. 量子力学の論理

量子力学では，一つの力学系 $\mathbf{S}$ に対して，その状態空間と呼ばれるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が対応する．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が与えられると，力学系 $\mathbf{S}$ の状態は $\mathcal{H}$ 上のトレースが 1 の正値作用素（密度作用素）で表され，物理量は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で表される．ボルンの統計公式によれば，状態 ρ において物理量 A の値が区間 Δ に属する確率は，$\mathrm{Tr}[E^A(\Delta)\rho]$ で与えられる．ここで，$E^A(\Delta)$ は自己共役作用素 A の区間 Δ に対応するスペクトル射影である．

バーコフとフォン・ノイマンによる量子論理の立場では，この定式化は，次のより根本的な原理からの帰結であると説明される．

QM1. 量子力学系 $\mathbf{S}$ の各観測命題の真理値は，系 $\mathbf{S}$ の状態空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間，または，それに対応する射影作用素で表現される．

QM2. 「物理量 A の値が区間 Δ に属する」という観測命題（原子観測命題）の真理値は，射影作用素 $E^A(\Delta)$ に対応する．

QM3. 観測命題の真理値が射影作用素が E に対応するとき，状態 ρ でその観測命題が観測される確率は，$\mathrm{Tr}[E\rho]$ である．

QM1 から，量子力学系 $\mathbf{S}$ の観測命題の真理値の全体 $\mathcal{Q}$ は，状態空間の閉部分空間の全体で表され，これを量子論理と呼ぶ．これは，包含関係の順序で完備直可補束になる．ここで，補元は直交補空間に対応す

る．ブール代数は，ちょうど分配法則が成り立つ直可補束として特徴づけられる．そこで，量子論理では，分配法則に代わって，どういう論理法則が成り立つかが，重要な問題とされた．バーコフとフォン・ノイマンは，有限次元の場合の射影幾何とモジュラー束の関係を基礎にして，モジュラー法則を研究したが，状態空間が無限次元のときは量子論理はモジュラー法則を満たさない*8)．伏見康治[13]は，バーコフとフォン・ノイマンのアプローチから離れて，分配法則を弱めた次のオーソモジュラー法則を発見した：$P \le Q$ ならば $P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = Q$．直可補束でオーソモジュラー法則を満たすものをオーソモジュラー束と呼ぶ[14]．量子論理を完備オーソモジュラー束の中で特徴づける問題には，すでに標準的な解答が得られている[15, 16]．また，グリースン（Gleason）の定理から，QM3 は「状態は量子論理上の確率測度である」という状態に関する上位の定義から導かれることが知られている．次節では，QM2 を導く物理量に関する上位の定義を求めるという問題を調べよう．

6. 量子集合論

有名なヒルベルトの 23 の問題のうち，第 1 の問題はカントールの連続体仮説*9)の真偽に関するものであった．この問題は，1963 年にコーエンによって，ZFC 集合論から独立な命題であることが証明された．1966 年にスコットとソロベイは，強制法と呼ばれるコーエンの証明法をブール代数値のセマンティクスをもつ集合論によって再構成して，非常に扱いやすい理論に書き換えた．この理論によれば，集合論の任意のモデルは，その内部の任意の完備ブール代数 $\mathcal{B}$ に真理値をもつ集合論のモデルに拡大される．つまり，この拡大モデルの元に関する集合論のすべての命題に，真偽の 2 値ではなく，完備ブール代数 $\mathcal{B}$ のある元が割り当てられ，なおかつ，ZFC 集合論から証明可能な命題に対しては，必ず，真を意味する $\mathcal{B}$ の最大元 1 が割り振られるようにできる．これを集合論のブール代数値モデルと呼ぶ．

1981 年に竹内外史[2]は，このブール代数値モデルの構成法を量子論理に一般化して，量子集合論を導入した．以下では，この構成法を任意の完備オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ に拡張したモデル $V^{(\mathcal{Q})}$ について解説する．これは，$\mathcal{Q}$ が完備ブール代数の場合には，スコットとソロベイのブール代数値モデルに一致し，$\mathcal{Q}$ が量子論理の場合には，竹内外史の量子集合論に一致する．また，$\mathcal{Q} = \mathbf{2}(= \{0, 1\})$ の場合は，集合論の通常の 2 値論理による解釈に帰着する．

$\mathcal{Q}$ を完備オーソモジュラー束とする．すると，$\mathcal{Q}$ は半順序関係 $\le$ をもつ半順序集合で，任意の部分集合 $\mathcal{S}$ はその上限 $\bigvee \mathcal{S}$ と下限 $\bigwedge \mathcal{S}$ を持つ．$\mathcal{Q}$ の最大元を 1，$\mathcal{Q}$ の最小元を 0 で表し，2 元集合 $\{a, b\}$ の上限と下限を $a \vee b$, $a \wedge b$ で表す．各 $a \in \mathcal{Q}$ は一意に定まる直補元 $a^{\perp}$ を持ち，(1) $a \le b$ なら $b^{\perp} \le a^{\perp}$，(2) $a^{\perp\perp} = a$，(3) $a \wedge a^{\perp} = 0$ が成立する．$\mathcal{Q}$ を真理値の体系とするとき，$\perp$ は否定の真理値，$\wedge$ は連言の真理値，$\vee$ は選言の真理値を表す．一般に，条件文の真理値を表す演算 $\rightarrow$ は，多義的であるが，本稿では，$a \rightarrow b = a^{\perp} \vee (a \wedge b)$ によって定義する．

集合論の $\mathcal{Q}$ 値モデル（$\mathcal{Q}$ 値集合論）$V^{(\mathcal{Q})}$ は，その部分類 $V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ に関する次の超限帰納法で定義される．（α は順序数を表し，On は順序数の全体を表す．）

1. $V_0^{(\mathcal{Q})} = \emptyset$.
2. $V_{\alpha+1}^{(\mathcal{Q})} = \{u |\ u : \mathcal{D}(u) \rightarrow \mathcal{Q},\ \mathcal{D}(u) \subseteq V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}\}$.
3. 極限順序数 α に対して，$V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}^{(\mathcal{Q})}$.
4. $V^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$.

$V^{(\mathcal{Q})}$ の元を $\mathcal{Q}$ 値論理における集合（$\mathcal{Q}$ 値集合）という．この定義から，$\mathcal{Q}$ 値集合 u は $\mathcal{Q}$ 値集合からなる集合 $\mathcal{D}(u)$ 上で定義された $\mathcal{Q}$ に値をもつ関数であり，$u(x)$ は近似的に（性質のいい u については）$x \in u$ の真理値を表す．

$\mathcal{Q}$ 値集合 u, v に対して，原子命題 $u = v$ と $u \in v$ の真理値が次のように定められる．

1. $[\![u = v]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \rightarrow [\![u' \in v]\!]) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \rightarrow [\![v' \in u]\!])$.
2. $[\![u \in v]\!] = \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!])$.

集合論の論理式 ϕ は原子論理式*10)と論理記号 $\neg$, $\wedge$,

---

*8) フォン・ノイマンは，射影幾何を無限次元に拡張した理論として，連続幾何を導入し，量子論のより精密な無限次元表現は，そのようなモジュラー法則をみたす「量子論理」を持つと予想した．これは，場の量子論のモデルが II_1 型フォン・ノイマン環で表現されることと解釈されるが，1960 年代に荒木不二洋によって場の量子論のモデルが必然的に III 型になることが示されて否定的に解決された．

*9) 実数の部分集合は，実数全体と 1 対 1 に対応するか，自然数で番号付けができるという仮説．

*10) $\in$ または $=$ および変数記号または定数記号から構成された項．

$\vee$, $\rightarrow$, $(\forall x \in y)$, $(\exists x \in y)$ $(\forall x)$, $(\exists x)$ から構成される．特に，量化記号として $(\forall x \in y)$ および $(\exists x \in y)$ の形のものだけを含む論理式を有界論理式と呼ぶ．集合論の命題 ϕ の真理値は原子命題の真理値と命題論理の真理値の規則

1. $[\![\neg\phi]\!] = [\![\phi]\!]^{\perp}$.
2. $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!]$.
3. $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \vee [\![\phi_2]\!]$.
4. $[\![\phi_1 \rightarrow \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \rightarrow [\![\phi_2]\!]$.

および，量化記号に関する真理値の規則

1. $[\![(\forall u' \in u)\phi(u')]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} [\![\phi(u')]\!]$.
2. $[\![(\exists u' \in u)\phi(u')]\!] = \bigvee_{u' \in \mathcal{D}(u)} [\![\phi(u')]\!]$.
3. $[\![(\forall x)\phi(x)]\!] = \bigwedge_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$.
4. $[\![(\exists x)\phi(x)]\!] = \bigvee_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$.

によって定まる．

2 値論理に基づく通常の集合の普遍類を V とすると，各 $a \in V$ に対応する $\mathcal{Q}$ 値集合 $\check{a}$ が存在する．実際，$\check{a}$ は $\mathcal{D}(\check{a}) = \{\check{x}|\ x \in a\}$ かつ $x \in a$ ならば $\check{a}(\check{x}) = 1$ となるものとして定まる．すると，通常の集合 a, b 間の関係は $\mathcal{Q}$ 値集合 $\check{a}, \check{b}$ の間の関係と同型である．つまり，$a \in b$, $a \notin b$, $a = b$, $a \neq b$ はそれぞれ $[\![\check{a} \in \check{b}]\!] = 1$, $[\![\check{a} \in \check{b}]\!] = 0$, $[\![\check{a} = \check{b}]\!] = 1$, $[\![\check{a} = \check{b}]\!] = 0$ と同等である．

こうしてできる $\mathcal{Q}$ 値集合論でどんな命題が成立しているかを研究することは，基本的重要性をもつ．$\mathcal{Q}$ が完備ブール代数 $\mathcal{B}$ の場合は，ZFC の定理から $V^{(\mathcal{B})}$ で真な命題への次の移行原理が成り立つ：論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が ZFC 集合論で証明可能なら，任意の $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{B})}$ に対して，$[\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!] = 1$ が成り立つ．

コーエンの強制法では，強制条件という，集合論のモデルに関する条件の半順序集合 $\mathcal{P}$ が構成された．この半順序集合 $\mathcal{P}$ から生成される完備ブール代数 $\mathcal{B}$ を構成し*11)，この完備ブール代数に関して，集合論の $\mathcal{B}$ 値モデルを構成すると，驚くべきことに連続体仮説の真理値が偽を意味する $\mathcal{B}$ の最小元 0 になっている．連続体仮説が ZFC 集合論で証明可能なら，真理値は 1 でなければならないから，これから，連続体仮説が証明不可能であることが証明されたことになる．

量子力学に特有な不確定性原理のために，$\mathcal{Q}$ が分配的でない場合には，上の移行原理は成立しない．例えば，等号の推移律，代入法則などの最も基本的な性質でさえ一般に成立しない．そんな集合論に意味があるのかという意見も出そうであるが[17]，命題間の同時決定可能性の概念を持ち込むことにより，$\mathcal{Q}$ 値集合論が実は極めて豊かな構造をもっていることがわかるのである．

$\mathcal{Q}$ の部分集合でその任意の 2 元が互いに交換可能であるものを可換系と言う．任意の可換系 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{Q}$ の極大完備部分ブール代数 $\mathcal{B}$ に拡大できる．$V^{(\mathcal{Q})}$ の構成を $\mathcal{B}$ に制限すると，ブール代数値モデル $V^{(\mathcal{B})}$ ができ，$V^{(\mathcal{B})} \subseteq V^{(\mathcal{Q})}$ となる．ZFC 集合論の公理を $V^{(\mathcal{B})}$ に制限すると上記の移行原理から ZFC 集合論の定理が成立することがわかる．

この考察を一般化すると，次のようになる．$\mathcal{Q}$ 値集合 $u_1, \ldots, u_n$ に対して，これらを構成するために用いた $\mathcal{Q}$ の元の集合を $L(u_1, \ldots, u_n)$ とする．$\mathcal{Q}$ の元 p で $L(u_1, \ldots, u_n)$ のすべての元と可換で，$p \wedge L(u_1, \ldots, u_n)$ が可換系になる最大の p を $\underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n)$ で表す．すると，一般の完備オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ に対して，次の移行原理が成立する：有界論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が ZFC 集合論で証明可能なら，任意の $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$[\![\phi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \geq \underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n)$ が成り立つ[9,18]．

$V^{(\mathcal{Q})}$ の自然数の全体は $\check{\omega}$ に対応し，有理数の全体は $\check{\mathbf{Q}}$ に対応する．$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数の全体 $\mathbf{R}_{\mathcal{Q}}$ は，$V^{(\mathcal{Q})}$ で定義される有理数のデデキント切断*12)の全体として定義される．すると，$[\![\check{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{R}_{\mathcal{Q}}]\!] = 1$ となる．

$\mathcal{Q}$ が相空間 Ω をもつ古典力学系 $\mathbf{S}$ の論理 $\mathcal{B}$ のとき，$[\![u \in \mathbf{R}_{\mathcal{B}}]\!] = 1$ となる u に対して，相空間 Ω 上のボレル関数 $\hat{u}$ が存在して，ルベーグ測度零集合に関する同値類として $\hat{u}^{-1}((-\infty, \lambda]) = [\![u \leq \check{\lambda}]\!]$ が成り立ち，この関係により $V^{(\mathcal{B})}$ の実数と古典力学系 $\mathbf{S}$ の物理量が一対一に対応する．

一方，$\mathcal{Q}$ が状態空間 $\mathcal{H}$ をもつ量子力学系 $\mathbf{S}$ の論理のとき，$[\![u \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}}]\!] = 1$ となる u に対して，$E_\lambda = [\![u \leq \check{\lambda}]\!]$ は射影作用素の族として単位の分解になり，u は自己共役作用素 $\hat{u} = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, dE_\lambda$ と一対一に対応する．よって，この関係により $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数と量子力学系 $\mathbf{S}$ の物理量が一対一に対応する．

つまり，量子物理量とは量子集合論における実数のことであり，「物理量 A の値は λ 以下である」という

*11) $\mathcal{B}$ は $\mathcal{P}$ の順序位相に関する正則開部分集合全体からなる完備ブール代数である．

*12) 正確には，下組が端点を持たない切断の上組をなす有理数の集合のこと．

観測命題の真理値は量子集合論の命題 $A \le \check{\lambda}$ の真理値 $[\![A \le \check{\lambda}]\!]$ のことである．このように，量子集合論の命題に直接観測可能な物理的解釈を与えることができる．

以上から，集合論の通常の 2 値論理に基づく解釈 $V^{(\mathbf{2})}$ を拡張して，古典力学の論理 $\mathcal{B}$ に基づく解釈 $V^{(\mathcal{B})}$，量子論理 $\mathcal{Q}$ に基づく解釈 $V^{(\mathcal{Q})}$ が構成され，「x は有理数全体のデデキント切断である」を意味する集合論の述語 $R(x)$ に対して，$V^{(\mathbf{2})}$ における外延は，われわれの実数の全体と一致し，$V^{(\mathcal{B})}$ における外延は，古典力学の物理量の全体に一致し，$V^{(\mathcal{Q})}$ における外延は，量子力学の物理量の全体に一致することがわかった．紙数が尽きたので，この理論的装置によって，量子力学の解釈を系統的に拡大するプログラムについては，別の機会に譲ることにしたい．

参考文献

1) G. Birkhoff and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.* **37**, 823–845 (1936).
2) G. Takeuti, Quantum set theory, in E.G. Beltrametti and B.C. van Fraassen, editors, *Current Issues in Quantum Logic*, pages 303–322 (Plenum, New York, 1981).
3) H. Putnum, Is logic empirical? in R.S. Cohen and M.W. Wartofsky, editors, *Boston Studies in the Philosophy of Science* **5**, pages 216–241 (D. Reidel, Dordrecht, 1968).
4) 小澤正直，数理論理学と経験科学の接点，科学基礎論研究 第 102 号，9–17 (Vol.32, No.1, 2004).
5) A. Robinson, *Non-Standard Analysis* (North-Holland, Amsterdam, 1966).
6) 齋藤正彦，『超積と超準解析』(東京図書，東京，1976).
7) M. Ozawa, A classification of type I AW*-algebras and Boolean valued analysis, *J. Math. Soc. Japan* **36**, 589–608 (1984).
8) A.G. Kusraev and S.S. Kutateladze, *Boolean Valued Analysis* (Springer, Berlin, 1999).
9) M. Ozawa, Transfer principle in quantum set theory, *J. Symbolic Logic* **72**, 625–648 (2007).
10) M. Ozawa, Quantum perfect correlations, *Ann. Phys. (N.Y.)* **321**, 744–769 (2006).
11) ブルバキ著，清水達雄他訳，『ブルバキ数学原論』(東京図書，東京，1968).
12) 島内剛一，『数学の基礎』(日本評論社，東京，1971).
13) K. Husimi, Studies on the foundation of quantum mechanics I, *Proc. Physico-Mathematical Soc. Japan* **19**, 766–778 (1937).
14) 前田周一郎，『束論と量子論理』(槇書店，東京，1980).
15) S.S. Holland, Jr., Orthomodularity in infinite dimensions; A theorem of M. Solèr, *Bull. Amer. Math. Soc.* **32**, 205–234 (1995).
16) S. Pulmannová, Axiomatization of quantum logics, *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 2309–2319 (1996).
17) ギビンズ著，金子務他訳，『量子論理の限界』(産業図書，東京，1992).
18) M. Ozawa, in preparation.

（おざわ・まさなお，名古屋大学大学院情報科学研究科）

量子力学「粒子と波動」

平野 琢也

1. はじめに

筆者の勤務する大学では，中学や高校に出向いて授業をする機会があります．先日，筆者に順番が回ってきましたので，中学3年生のあるクラスで話をしてきました．話の内容は，光は身近なもので，私たちが生まれた直後から身の回りの情報を得るために利用しているものですが，光について改めて考えてみると，色々と面白いことがあるのです，というものです．準備不足のまま分かりにくい話をしてしまったと反省しているところですが，幸い授業中にいくつかの質問がありました．そして，その中に次のような鋭い質問がありました．「光は波でもあり粒でもあるということですが，どんな場合に波であり，あるいは粒であるのでしょうか？」光は波であるから干渉するという説明をしますが，もしも粒でもあるのであれば，粒であるという立場で素直に考えれば干渉しないはずです．光の振舞いを説明するときに，光は粒子性と波動性を同時に兼ね備えているとし，現象ごとに都合の良い解釈を持ってくるのであれば，どういう基準でどちらの解釈を選ぶべきなのでしょうか，説明して下さいということなのでしょう．この中学3年生の質問にどのように答えたら良いでしょうか？

2. 粒子と波動

量子力学における粒子と波動については，既に多くの優れた解説があります．特に有名なのは朝永振一郎による「光子の裁判」でしょう[1]．本誌でも1999年1月号に霜田光一先生による解説[2]，2000年2月号に河原林研先生による解説などが掲載されています．また，高校の物理IIの教科書にも光や電子の波動性と粒子性が説明してあり，学習指導要領によりますと，高校3年生に「量子的な考えなど基本的な概念や原理・法則を理解させる」ことになっています．

朝永振一郎が「光子の裁判」の1，2年前に執筆した『量子力学的世界像』は，「量子力学に関する議論でいつも聞かされる「粒子と波動」の問題から出発」して議論が展開されています．そして，「光がある現象では粒子のように，他の現象では波動のように振る舞うことが実験的に明らかにされたのであるが，これを矛盾なく一つの仮説から導出することは果してできるのだろうか．我々のもつ波動とか粒子とかの概念は，一つのものがどのどちらでもあるなどという解釈を許すものではない．だから光が波動でありかつ粒子であるというような言い方は確かに矛盾に満ちている」と述べています．しかし，冷静に「光が粒子であるとの結論の根拠となった光電効果の実験を調べてみると，電子に対する光のエネルギーのやりとりは $h\nu$ かあるいは0であって，その途中の値 $h\nu/3$ など

にならない，という事柄以上の内容をもっていないことがわか」り，「我々の日常概念の「粒子」をもって来ることは，我々の想像によって実験事実を事実以上に補っている」のであると指摘しています．その上で，量子力学が規定するものは，日常的な「波動でも粒子でもなく，全く新しいもの」で，その「概念を明確に規定することは，数学的な表象によらなければほとんど不可能」であり，数学なしでは「ちょうど音楽や絵画を文字で表すようなものであって，非常にむずかしい」と述べています．

この朝永振一郎の考え方は，おそらく，多くの研究者の間で共有されているものでしょう．私は，先ほどの中学3年生の質問に「光の振舞いは量子力学でちゃんと説明できます」と答えました．しかし，2つの解釈をどのように選べばよいのかについて説明しているわけではありませんので，質問にきちんと答えていないのではという後ろめたさを感じました．波動性と粒子性を兼ね備えた量子力学的な「あるもの」（朝永はウェーヴィクルと呼んでいます）の振舞いは量子力学により首尾一貫して記述できるとしても，量子力学の明確な説明には数学が不可欠であり，日常の言葉で量子力学を説明するのは難しい．そうであるとすると，高校3年生にとっても，線型空間どころか微積分も使わないことになっている高校物理の範囲内で，量子力学の原理や法則を理解するのはほとんど不可能ということになってしまいます．

ウェーヴィクルについて，朝永は次のようにも述べています．「量子力学を知る前に，我々は自然界に波動と粒子という二種のものが存在すると考えていたが，こうして実際には，ただ一種のものだけが存在することになったから」，ウェーヴィクルは「我々が今まで全く知らなかった新奇なものであるけれども，我々の世界像はそれだけ単純になったことを意味する」．そして，「我々は幼児が己れのまわりにある物について概念を構成していくように，この新しい物についての概念を作らねばならないし，またそれは必ず可能であろう」．

さて，筆者は，量子力学的な光学現象を扱う量子光学という分野の実験をしています．朝永が『量子力学的世界像』を書いた1940年代と比べると，1960年にレーザーが実現され，その後も現在に至るまで継続している光学技術等の進歩のおかげで，かつては思考実験に過ぎなかった実験を実際に実行できるようになっています．以下では，これらの実験を紹介することで，我々の回りにある光子の概念を構成していく一助になれば幸いです．

3. 光電効果

光電効果は金属などの表面に光が当たったときに電子が飛び出す現象であり，ある特定の振動数よりも高い振動数の光を当てたときのみ電子が飛び出します．1905年にアインシュタインは光電効果に関する理論を発表し，ノーベル財団はこの業績を主な理由としてアインシュタインにノーベル物理学賞を授賞しました．光電効果は古くから知られた現象ですが，光の粒子性を議論する際は，避けて通れないテーマです．

光電効果は光の粒子性を示す現象として有名なわけですが，それは，光を粒だと考えることで現象を容易に説明できるのが一つの理由でしょう．光の1つの粒は $h\nu$ のエネルギーを持っているとします．ここで，h はプランク定数，ν は光の振動数です．電子が金属表面から外へ飛び出すにはある決まったエネルギーを必要とすると考えるのは自然なことですから，そのエネルギーよりも大きなエネルギーを持つ光の粒を当てないと電子が飛び出さないのは納得できます．

しかし，ある理論で現象を説明できたとしても，その理論のみが正しいという証拠にはなりません．別の理論でも同じ現象を説明できるかもしれないからです．光電効果が光の粒子性の証拠であると言うためには，光を波として扱ったのでは光電効果を説明できないことを示す必要があります．しかし，実際には，光電効果は，物質側のみを量子化し，光はマクスウェル方程式で記述される波として扱って説明できることが示されています[2,3]．このような理論的取扱いは半古典論と呼ばれてい

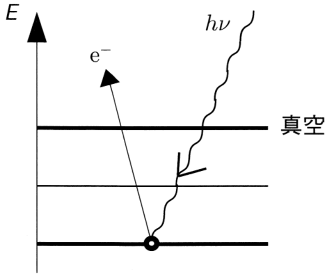


図１　半古典論による光電効果の説明．

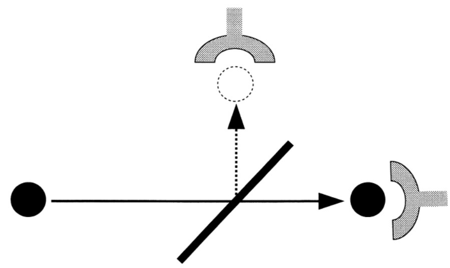


図２　単一光子のアンチバンチング．

ます．半古典論では，電子は量子力学で扱いますので，電子のとり得るエネルギーは量子化されて飛び飛びの値をとり，このような飛び飛びのエネルギー準位間で遷移を起こすには，電磁波の振動数はある一定以上である必要があります（図１参照）．ですから，光電効果は光の粒子性を示す現象であるという言い方は許されても，粒子性の証拠であると主張することはできません．このように，ちょっと微妙なことを，物理を選択した高校３年生は学んでいることになります．また，半古典論が不自然な理論かというとそうではなくて，ほとんどの光学現象は半古典論で説明できることが知られており，物質の光学的な性質を研究するときも，通常は半古典論が用いられています．

4. 単一光子とアンチバンチング

それでは，光を波として扱ったのでは説明のできない現象にはどのようなものがあるのでしょうか？ 説明できるかどうかを議論するためには，波として扱うという意味をはっきりさせる必要がありますが，ここでは半古典論で説明できるかどうかを考えることにします．そして，アンチバンチングという現象が半古典論では説明できないことを紹介します．

アンチバンチングは光を粒だと考えると簡単に理解できる現象です．光の粒，光子がたった１個しかないとすると，粒であるということの顕著な表れとして，同時に２カ所以上の場所で光子が検出されることはあり得ないはずです．例えば，図２のように，単一の光子を半透鏡に入射し，透過側と反射側に光子の検出器を置きます．半透鏡というのは反射率と透過率が50%の鏡であり，光子の検出には，光電効果を利用して，飛び出してくる電子を検出することができます．このとき，光子は，反射するか透過するかのどちらかしかあり得ないはずですので，透過側と反射側の検出器で同時に光子が検出されることはないはずです．アンチバンチングというのは，このように，２カ所で光子を検出したとき，同時に検出される事象が少なくなる現象です．

では，光を波として扱う半古典論で図２の実験はどのように記述されるのでしょうか[4]．時刻 t における光の強度を $I(t)$ とすると，光を波として扱う立場では，$I(t)$ は正の実数値をとります．そして，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に電子が飛び出す確率は，$\eta I(t)\Delta t$ と書くことができます．ここで η は検出器の感度を表す係数です．光の強度 $I(t)$ は，一般に，時々刻々と変化しますが，その変化は定常的であり，時間の原点をどこにとっても良いものとします．

さて，半透鏡で光を半分ずつに分割し，片方では時刻 t から $t+\Delta t$ の間に光子が検出されるかどうかを，もう片方では，時刻 $t+\tau$ から $t+\tau+\Delta t$ の間に光子が検出されるかどうかを測定するとします．２つの検出器の感度を η_1 と η_2 とすると，２つの検出器の両方で光子が検出される確率は，

$$P(t, t+\tau) = \frac{1}{4}\eta_1\eta_2 I(t) I(t+\tau) \qquad (1)$$

と書けます．この確率の時間平均をとるとき，定常的であれば，時刻 t にはよらず，時間差 τ のみで決まることになります．時間差 τ が十分大き

いと，2つの時刻における光の強度変化には相関がなくなるはずですので，強度の積の時間平均は，$\langle I(t)I(t+\tau)\rangle = \langle I(t)\rangle\langle I(t+\tau)\rangle$ と書けます（τ が十分大きいとき）．

(1) 式の量は検出器の感度などにも依存しますので，通常，次式で表される規格化した量を扱います．

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle\langle I(t+\tau)\rangle}. \tag{2}$$

これは規格化した2次の強度相関関数と呼ばれる量であり，時間差 τ で光子を検出する確率を，τ が十分大きい場合の確率で規格化したものです．定常的な場合は，τ の偶関数であり，上で述べたことから，$g^{(2)}(\pm\infty)=1$ となります．

半古典論ではどんな時間差 τ についても，

$$g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau) \tag{3}$$

が成り立ちます．これは，$\langle\{I(t)-I(t+\tau)\}^2\rangle > 0$ という不等式と，$I(t)$ が定常的であることから導くことができます．つまり，$\tau=0$ という2つの検出器で同時に光子を検出する確率は，時間差が有限である場合に比べて常に大きくなくてはならないというのが，半古典論の帰結となります．これは，光の粒が一つだけあるときに，2つの検出器で同時に光子を検出する確率がゼロになるという予想と相容れない帰結です．

次に，量子力学で強度相関関数を考えます．光の量子論では，電磁場は量子力学的な調和振動子の集まりとして扱うことができます．電場 E は，交換関係 $[a, a^\dagger]=1$ を満たす生成消滅演算子により，

$$E(t) = \mathcal{E}(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \tag{4}$$

と書けます．光の全くない真空状態 $|0\rangle$ は，$a|0\rangle = 0$ となる状態であり，光子が1つだけある単一光子状態 $|1\rangle$ は，真空状態に生成演算子を作用させた状態，$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ です．規格化した2次の強度相関関数は，生成消滅演算子により，

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau)a(t)\rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle^2} \tag{5}$$

と書くことができ，単一光子状態に対しては，

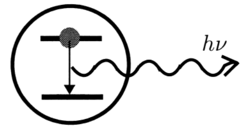


図3　単一原子による単一光子の発生．

$g^{(2)}(0)=0$ となります．これは，光を粒と考えたときと同じ結果となります．

実験的にアンチバンチングを観測するためには，光子をたった1個だけ発生する必要があります．そのためには，原子をたった1つだけ用意します．この原子をエネルギーの高い励起状態に遷移させ，しばらくすると，原子は光子を1つ自然放出し，エネルギーの低い状態へ遷移します（図3参照）．2つめの光子が放出されるためには，原子をもう一度励起状態に遷移させ，自然放出が起こらなくてはなりません．よって，原子が1つしかないとき，光子が同時に2個以上発生することはないはずです．ただし，一様な空間にある原子から自然放出される光子はランダムな方向に出てきますので，この発生方法では単一光子の飛んでいく方向を制御することは困難です．

最初にアンチバンチングが報告されたのは1977年です[5]．当時はたった1つの原子を捕まえておくといった技術はありませんでしたから，原子ガスの中のほぼ1個の原子からの自然放出光のみを観測するようにして実験を行いました．そのため，同時に2個の原子がいる場合もあり，$g^{(2)}(0)$ はゼロにはなりませんでしたが，確かに $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ という実験データが得られ，それは光を波として考えると説明のできない実験結果です．

では，レーザー光を透過率の低い物質に通して非常に微弱にして，ぽつぽつとしか光子が飛んでいないような状況で強度相関関数を測定したらどうなるでしょうか？ 例えば，波長532 nmの緑色のレーザーポインターは通常1 mW程度の出力があります．このレーザー光を1兆分の1の強度まで減衰すると，波長532 nmの光子1つのエネルギーは 3.7×10^{-19} J ですので，ある断面を1秒間に通過する光子の数は2700個程度となります．

これは，通常の光子検出器の時間分解能を考えると，ごくまれにしか光子がいない状況です．このような実験を行うための装置は，高級車を買う予算があれば十分購入することができます．実際に実験を行うと，$g^{(2)}(0)=1$ という結果が得られ，アンチバンチングは観測されません．光を波として取り扱い，強度 $I(t)$ が一定であるとすると，(2) 式より，$g^{(2)}(0)=1$ となります．波としての立場では当然の結果であるということもできますので，やはり車を買ったほうがよかったかもしれません．

レーザー光の状態はコヒーレント状態として良く記述できることが知られています．コヒーレント状態は R.J. Glauber が 1960 年頃に理論的な研究を行った状態であり[6)]，Glauber はこの業績により 2005 年のノーベル物理学賞を受賞しています．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は，消滅演算子 a の固有状態として定義することができます．

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle. \tag{6}$$

ここで，α は複素数であり，$|\alpha|^2$ は平均光子数を表します．(6) 式と (5) 式より，コヒーレント状態では $g^{(2)}(0)=1$ となります．

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ で n 個の光子が観測される確率 $P(n)$ は，ポアソン分布となります．

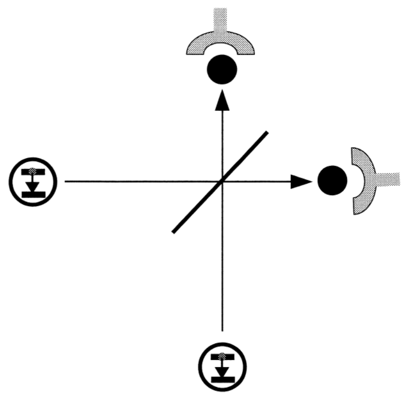
$$P(n)=e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^n/n!. \tag{7}$$

光を粒として考える立場では，どんなに $|\alpha|^2$ を小さくしても，2 個光子が存在する確率 $P(2)$ の寄与のために，$g^{(2)}(0)=1$ となることを説明することができます．レーザー光の規格化された強度相関関数が 1 となることは，波としても粒としても説明できるわけです．

5. Hong–Ou–Mandel 干渉

前節では，単一光子の示す粒子性を扱いました．この節では，区別できない 2 つの光子が示す興味深い干渉を紹介します．

図 4 のように，2 つの原子を用意します．それぞれから 1 つずつ光子を発生し，それらを半透鏡で重ね合わせ，半透鏡の 2 つの出力に光子検出器をおいて測定するという実験を考えます．2 つの光子検出器は半透鏡から同じ距離におき，両方の検出器で光子を検出する事象を観測します．図 2 の単一光子のアンチバンチングを測定する実験は，半透鏡の片方の入力から単一光子を入射するものでした．その場合は，1 つの光子は反射するか透過するかのどちらかであり，2 つの検出器で同時に光子が検出されることはありません．では，図 4 のように，2 つの入力に 1 つずつ光子を入射するとどうなるでしょうか？


図 4　2 つの原子から発生する区別できない 2 つの光子．

光が粒であるとすると，2 個の光子の反射と透過は図 5 のように 4 つの場合があります．すなわち，(a) 2 個とも透過する，(b) 2 個とも反射する，(c) 左から入った光子は反射，下からの光子は透過し，2 個とも上側の出力へ行く，(d) 左側の光子は透過，下側の光子は反射し，2 個とも右側の出力へ行くという 4 つの場合です．(a) と (b) の場合は，2 つの出力に 1 個ずつ光子が現れますので，2 つの検出器で同時に光子が検出されます．

原子を使ったこのような実験は，2006 年に Beugnon らにより報告されました[7)]．原子は，光トラップという手法により，空間的に離れた場所に 1 個ずつ保持されました．また，この実験では，ラマン過程を利用することで，単一光子を発生するタイミングや進行方向を制御しています（それでも

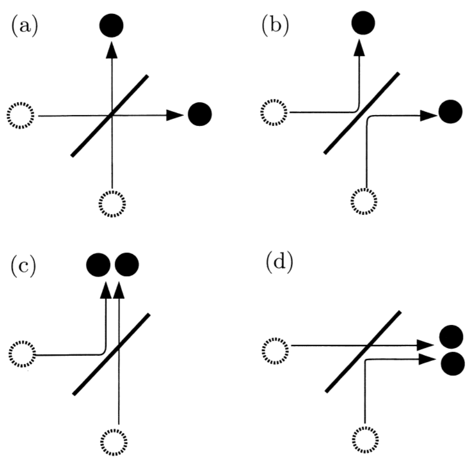


図 5　2 個の光子の反射と透過．

単一光子がきちんと検出される確率は現実にはそれほど高くなく，一つの検出器あたり 0.6%です)．

では，実験結果がどうなったかと言うと，2 つの検出器で同時に光子が検出される事象は，有限の時間差がある場合に比べて少ないというデータが得られました．また，理論的な解析により，同時に光子が検出されたのは，2 つの光子の空間的なモードの不一致により良く説明ができました．つまり，理想的な場合には，2 つの検出器で同時に光子が検出されることはないはずという結果となりました．

以上の結果は，図 5 の (a) や (b) のようなことが起こらないことを意味しています．なぜでしょうか？ 素朴な粒，または波のどちらかの考えでは説明することが難しいのですが，量子力学的な粒子としては，ある程度直感的な説明が可能です．2 つの光子が区別できないとすると，1 つずつ光子が検出されたとして，(a) のように透過したのか，(b) のように反射したのかを区別することができません．始状態から終状態に至る区別のできない 2 つの経路があるとき，量子力学ではこれらの確率振幅は干渉を起こします．そして，波として考えると，反射するときと透過するときでは位相が 180 度ずれます．そのため，図 5 (a) と (b) は，この量子力学的な干渉により，打ち消し合うことになります．結局，半透鏡の入力に 1 個ずつ光子を入力したとき，1 個ずつ出力されるということは起こらず，(c) または (d) のように，どちらかの出力に 2 個の光子が出てくることになります．

実は，区別のできない 2 つの光子がこのような量子力学的干渉を起こすことは，20 年以上前から実験的に示されていて[8]，この実験を行った 3 人の名前をとって，Hong–Ou–Mandel 干渉と呼ばれています．元々の Hong–Ou–Mandel の実験は，パラメトリック下方変換で発生した光子対が量子力学的な干渉を起こすことをみたものです．

6. おわりに

量子力学的粒子の示す波動的あるいは粒子的な振舞いは，量子力学により記述できるとしても，その概念をできるだけ平易な言葉で説明できるに越したことはありません．あるいは，それができないうちは，まだ私たちの経験が不十分で，概念の構成が不完全なのかもしれません．

参考文献

1) 朝永振一郎：『量子力学と私』，江沢洋編，岩波書店 (1997).
2) 霜田光一：光子と光波，「数理科学」，No.**427**, pp.5–9 (1999).
3) 矢島達夫：光の量子効果，『量子力学と新技術』pp.182–203, 日本物理学会編，培風館 (1987).
4) 小芦雅斗：強度相関関数とアンチバンチング，「月刊オプトロニクス」，2007 年 1 月号：連載「基礎からの量子光学」第 13 回，vol.**26**, No.301, p.219–225 (2007).
5) H.J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* vol.**39**, pp.691 (1977).
6) R.J. Glauber: *Phys. Rev.* vol.**130**, pp.2529 (1963).
7) J. Beugnon, *et al.*: *Nature*, vol.**440**, pp.779 (2006).
8) C.K. Hong, Z.Y. Ou and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* vol.**59**, pp.2044 (1987).

（ひらの・たくや，学習院大学理学部）

特異点定理とブラックホール特異点

前田　健吾

1. はじめに

星の重力崩壊や宇宙の進化の過程で，時空がどのように発展するのかを知るには，難解なアインシュタイン方程式を解かなくてはなりません．しかしながら，重力崩壊のような強い重力現象の下では，一般相対論における金字塔であるホーキング・ペンローズの特異点定理[1)]によって，一般的に時空特異点が生じることがわかっています．時空特異点と言うと，その点で重力が際限なく大きく，あらゆる物体が無限小に押し潰されるような点を想像するかも知れません．この定理はこのような点の存在を予言しているのでしょうか？ 特異点の定義や定理証明の背景にある論理構造を捉え直し，重力崩壊のモデルを例に挙げながら，特異点定理によって得られる帰結は何なのか改めて考えてみたいと思います．

2. 球対称真空ブラックホール解における特異点

まず初めに，電荷や角運動量を持たない単純な構造を持つ球対称真空ブラックホール時空で，どのように特異点が現れるのか調べてみましょう．4 次元時空のある点 $x^\mu\,(\mu = 0,1,2,3)$ とその近傍の点 $x^\mu + dx^\mu$ との間の世界間隔 ds は，添え字 μ と ν の入れ替えについて対称な 10 個の関数（以降計量と呼ぶ）$g_{\mu\nu}(x^\mu)$ を用いて $ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ と表せます．この計量の時間発展はアインシュタイン方程式を解いて決定されます．

ブラックホール時空の計量は，それぞれ時間座標 t，動径座標 r を用いて

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

となります．$d\Omega^2$ は単位球面の 2 次元計量を表します．M は正の定数でブラックホールの質量です．一見 $r = 2M$ では計量の g_{rr} が発散しているので特異点と思われます．ところが時間座標 t の代わりに

$$v = t - \int^{r} \frac{d\tilde{r}}{1-\frac{2M}{\tilde{r}}} \quad (2)$$

という座標を用いると，ブラックホールの計量は

$$ds^2 = -2dvdr - \left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

となり，もはや $r = 2M$ における計量の発散は消えてしまいます．そこで，座標に依らない量（スカラー量）として，時空の曲がり具合を決める曲率テンソル[2)] $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ を用いて，

$$I = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (4)$$

のようなスカラー量でブラックホールの特異点を考えてみましょう．この量をブラックホール解で計算してみると $I \sim \frac{M^2}{r^6}$ となって，$r = 0$ で発散します．従って r が正の領域から負の領域へは滑

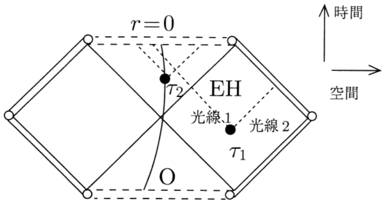


図 1 球対称真空ブラックホール解のペンローズダイアグラム．45 度の点線は光の軌跡を表す．EH は事象の地平面（$r=2M$）を表し，実線の二重線および白丸は光的無限遠方および時間的（または空間的）無限遠方をそれぞれ表す．事象の地平面内部の 2 次元球面 τ_2 から出た光はすべて特異点 $r=0$（破線の二重線）に行きつく．

らかにつながっていません．曲率は $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分から得られますので，アインシュタイン方程式に何らかの発散量が生じて，一般に曲率の発散点を超えてアインシュタイン方程式を解くことが困難になります．

この $r=0$ という特異点は，水素原子のクーロンポテンシャルに見られるような，空間的に局在した特異点とは大きく異なります．図 1 は，時空の因果構造を簡単に見ることができるペンローズダイアグラム[2)]と呼ばれるものです．2 次元球面は一点に縮約し，動径座標 r の方向に進む光を 45 度の直線で描きます．縦方向は時間方向を表し，横方向は空間方向を表します．例えば，ブラックホール外部にある 2 次元球面 τ_1 から外向きに発せられた光線（光線 2）は 45 度で右上に進み，無限遠方（二重線）に向かいます．一方，$r=0$ の特異点は横一直線になりますので，ブラックホール内部（$r<2M$）の任意の 2 次元球面 τ_2 から発せられた光線はすべて特異点で終わります．従って，τ_2 を通過するどんな観測者も特異点で終わります（図の曲線 O は観測者の軌跡を表す）．

通常，ブラックホールの外側にある球面（τ_1）では，内向きに発せられた光線（光線 1）に沿って球面の面積が減少し，外向きに発せられた光線（光線 2）に沿って球面の面積は増大します．ところがブラックホール内部では r が時間の役割をするので[*1)]，未来向きに進むどちらの光線に沿っても面積は減少する一方です．従って τ_2 から発せられる 2 つの光線のどちらに沿っても球面の面積は減少するのです．このような面のことを補捉面と呼びます．重力崩壊などの強い重力現象の下では，一般的に発生すると考えられています．

3. 特異点定理における特異点とは？

前節でブラックホールの特異点の構造を見てきましたが，仮にある座標で (4) 式のような曲率テンソルから作られる何らかのスカラー量が発散しても，必ずしも時空が特異であるとは言えないことを以下の例で見てみましょう．しばらくアインシュタイン方程式は忘れて，共形変換[2)]と呼ばれる変換を用いて，平坦なミンコフスキー時空から，曲率の発散した時空を作ってみます．ミンコフスキー時空は (1) 式の $M=0$ に相当しますが，これを a^2 でスケール倍すると時空の計量は

$$ds^2 = a^2(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{5}$$

となります．簡単のために a が時間 t のみの関数として

$$a(t) = \frac{1}{(b-t)\ln|b-t|} \tag{6}$$

としてみます．ここで，b は正の定数です．この共形変換された時空のスカラー曲率を計算してみると

$$R = 6\Big[2 + \ln|b-t|\big\{3 + 2\ln|b-t|\big\}\Big] \tag{7}$$

となって，$t=b$ で発散することがわかり，曲率が座標に依らず発散するという意味で特異点です．ここで，$t=b$ に近づく観測者の軌跡を調べてみましょう．観測者に働く力が重力のみとすると，すべての観測者は質点近似の下，時間的測地線と呼ばれる軌跡に従います．$r=$ 一定線 は時間的測地線になっているので，この測地線に沿う観測者の固有時間 τ と t の関係は容易にわかり，

$$\tau(t) = \int^t a(\tilde{t})d\tilde{t} = \ln\big(|\ln|b-t||\big) \tag{8}$$

となります．つまり，$t=b$ にたどり着くまでに無

*1) r が減少する向きが時間が進む向きと等しい．

限の固有時間がかかってしまうのです．我々観測者が無限時間かけて感知できないような点 $t=b$ は時空の特異点と考えて良いでしょうか？

そこで，曲率の発散した“点”に着目するのはやめて，その“点”に近づく測地線で時空の特異性を定義することにします．すなわち時空に特異点がないとは，「時空内のすべての因果的測地線（時間的測地線＋光的測地線）が過去にも未来にも無限にアフィンパラメーターを伸ばせること」と定義するのです．アフィンパラメーターとは，時間的測地線の場合，固有時間 τ のことで，固有時間のない光的測地線についても座標に依らず定義される自然なパラメーターです．この特異点の定義を用いて，ホーキング・ペンローズの特異点定理は以下のように記述されます．

ホーキング・ペンローズの特異点定理
以下の3つの条件が同時に満たされるとき，アフィンパラメーターを無限に伸ばせない因果的測地線が少なくとも1本は存在する．

1. 強いエネルギー条件が成立し，すべての因果的測地線上に，潮汐力がゼロでない点が存在する．
2. 捕捉面 τ が存在する．
3. 因果律の破れが存在しない．

条件1は重力特有の性質で，重力によって運動する物体は互いに引き付け合うことを述べています．潮汐力とは，一言で言うと空間の各点に働く重力の大きさが異なることによって生じる力のことです．対称性の高いミンコフスキー時空では潮汐力は働きませんが，そこに星が1個でもあれば，星の作る重力場によって，時空のあらゆる点に潮汐力が生まれます．この大きさについては言及していませんので，条件1の潮汐力に関する条件は極めて弱い条件です．条件2の補捉面は，第2節のブラックホール時空で登場しましたが，これが特異点定理の証明の鍵になります．条件3は，時空全体で閉じた因果的曲線が存在しないことを保証するものです．

4. 特異点定理証明のポイント

ここでは，定理の証明そのものを解説するのではなく，証明の背景にあるものを簡単に紹介しながら，証明の論理構造を見ていこうと思います．証明のポイントの一つは，背理法を使ってすべての因果的測地線のアフィンパラメーターが無限に伸ばせると仮定して，上の3つの条件と何らかの矛盾を導く点です．その証明の鍵になるのが以下の命題です．

命題　ある閉じた2次元面 S から直交する方向に出された光的測地線に沿って，共役点が存在するとき，その共役点から先の任意の点 p に対して，S と p を結ぶ時間的曲線が存在する．

共役点とは，隣合う因果的測地線どうしが互いに交差する点のことです．光速は一番速く伝播するので，S から出た光で構成される光錐面上の一点を，S から出た何らかの時間的曲線で結ぶことができるというのは，一見矛盾しているように見えます．ところが，図2のように，共役点が存在するとその先の点は時間的曲線で容易に結ばれることは明白でしょう．

特異点定理の条件2と共役点との関わりを見るために，隣合う測地線で構成される測地線束を考えてみましょう．測地線束は，流体を構成している粒子の流線の束（流管）に譬えることができます．実際の圧縮性流体は，場所によって膨らんだ

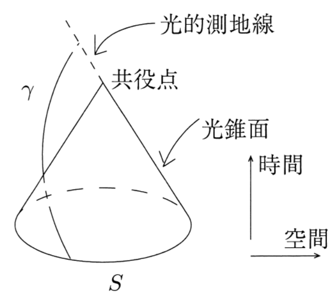


図2　ループ S から内向きに出た光錐面．光錐面を構成する光的測地線上の点は，共役点よりも先で S からの時間的曲線 γ で結ぶことができる．

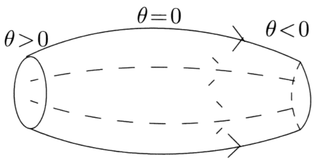


図 3　因果的測地線束は細い流管に譬えることができる．断面の微小面積は δA．ただし，膨張率 θ は時間方向に単調に減少する．

り縮んだりします．つまりこの流線束の膨張率 θ は負にも正にもなるわけです．ところが，光的測地線の場合，θ は図 3 のように未来向きに単調に減少します．さらに，ある時点で $\theta<0$ であれば，有限のアフィンパラメーターで θ は負の無限大になり，共役点を持つことが知られています*2)．捕捉面 τ が存在するということは，τ 上で τ に直交するあらゆる光的測地線束に沿って膨張率 θ が負であることを意味します．従って，τ に直交するあらゆる光的測地線束は，有限のアフィンパラメーター内で共役点を持つことがわかります．

図 1 のブラックホール時空の例から，この共役点が特異点であると容易に想像できますが，いま背理法によりあらゆる因果的測地線が無限に伸ばせると仮定していますので，その共役点の先にも時空があり，測地線はいくらでも未来向きに伸ばせます．ここで，閉じた 2 次元空間面 S からあらゆる未来向きの因果的曲線で結ぶことができる時空点の集合を $J^+(S)$ とします．$J^+(S)$ の境界 $\dot{J}^+(S)$ はいわゆる光錐面と呼ばれるもので，光的測地線束で作られています．

では，共役点より先まで光的測地線が伸ばせるとすると，これらの集合はどのようになっているのでしょうか？ 先の命題と矛盾しない一つの例が図 4 です．空間面を 2 カ所切って，上面と下面をそれぞれ別の面と同一視します．同一視を行った面 A, B の端点は時空の点に含めることはできないので，白丸にしておきます．この同一視によって，S からの時間的曲線 γ が共役点よりも先の光的測地線上の点に交わり，S から外向きに出た

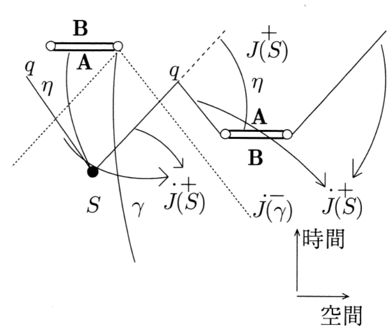


図 4　共役点 q よりも先に時空が伸ばせたときの一例．A 面と B 面はそれぞれ同一視されているので，捕捉面 S からの時間的曲線 η は q よりも先に伸ばされた光的測地線（点線）と交わる．

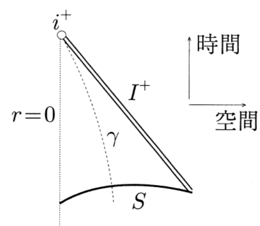


図 5　ミンコフスキー時空のペンローズダイアグラム．時間的無限遠点 i^+ に向かう時間的曲線 γ に関する集合 $J^-(\gamma)$ の境界は時空上に存在しない．二重線は光的無限遠方を表す．

光錐面が共役点 q で終わります．因果的測地線のアフィンパラメーターが無限に伸ばせると仮定しているので，この白丸は，図 5 のミンコフスキー時空における時間的無限遠点 i^+ の白丸と同様ですが，以下のような意味で大きく異なる点があります．

図 5 の時間的無限遠方 i^+ に向かう時間的曲線 γ の各点から，過去向きの因果的曲線で結ぶことができる点集合 $J^-(\gamma)$ を考えましょう．この集合の境界は光的無限遠方 I^+ になっているので，明らかに時空上に存在しません．一方，図 4 の白丸の場合は，集合 $J^-(\gamma)$ の境界 $\dot{J}^-(\gamma)$ が時空上に存在します．ここが大きく異なる点です．従って，境界が時空上に存在しながら白丸を無限遠方に持っていくには，共形変換のような変換で，白丸付近の時空領域だけ局所的に無限に拡大されている必要があります．それを条件 1 を満足しなが

*2)　θ は微小断面積 δA を用いて $\theta=\frac{d\delta A}{d\lambda}/\delta A$ と定義されるので，$\theta=-\infty$ のとき，$\delta A=0$.

らできるかどうか簡単に見るために，ミンコフスキー時空を共形変換した時空で調べてみましょう．$t=r=0$ 点が無限遠方になる共形変換の一例として

$$a(t,r)=(r^2+t^2)^{-n},\quad n>0 \tag{9}$$

を考えてみます．強いエネルギー条件はリッチテンソル[2)]$R_{\mu\nu}$ と任意の因果的ベクトル V^μ を用いて $\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu\geq 0$ を要求しますが，今 $V=\partial_t$ とすると

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 4n\big((1+2n)r^2-3t^2\big)(r^2+t^2)^{2(n-1)} \tag{10}$$

となって，明らかに原点付近 $r\sim 0$ で破れています．つまり，強いエネルギー条件と白丸が局所的に無限遠方になっているということは，相反することなのです．もちろんこれは共形変換という特殊な変換しかやっておりませんが，ホーキング・ペンローズの特異点定理は，このような性質をたくみに利用して証明しています．この証明の詳細は専門書[1)]に譲るとして，最後にこの特異点定理と現実に発生している特異点との関わり合いについて考えてみます．

5. 特異点定理は何を予言できるのか？

第2節で球対称真空ブラックホール時空の特異点を調べてみました．このブラックホール時空は球対称な星の重力崩壊によって作られますが，実際中性子星などで起こっている重力崩壊を見ると，中性子星が高速で回転しているために，カー解[2)]と呼ばれる回転しているブラックホール解に落ち着くと考えられます．このようなブラックホール解内部の解析は非常に難しいので，電荷を持つ球対称物質場の重力崩壊が，代わりに調べられてきました．この重力崩壊によって引き起こされるブラックホール解の内部構造が，カー解とよく似ているからです．どちらの解も，事象の地平線の内部にコーシーホライズン（CH）と呼ばれる光的

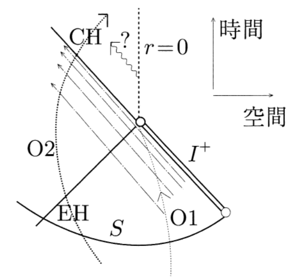


図6　電荷を持つブラックホールのペンローズダイアグラム．EHは事象の地平線を表す．ブラックホール外部の観測者O1は，無限時間かけて波のエネルギーを受け取るが，ブラックホール内部の観測者O2は，コーシーホライズン（CH）上で一瞬にして全エネルギーを受け取る．白丸は時間的無限遠方（または空間的無限遠方）を表す．

3次元面を持つのが特徴です．これまでの研究の結果，このCH上に曲率の発散が比較的弱い特異点が発生することが明らかになってきました[3∼5)]．図6は，電荷を持つ球対称ブラックホール解に，質量項のないスカラー場などの摂動が加わったときのペンローズダイアグラムを示したものです．

中性子星は，重力崩壊の過程で重力波を徐々に外部に放出しますが，その一部は，中性子星自身が作る強い重力場によって跳ね返され，ブラックホール内部に徐々に侵入していきます．重力波は光速で伝搬するので，同じく光速で伝搬する質量項のないスカラー場に置き換えたのが，図6のCHに沿って左上に45度で進む内向きの球面波です．ブラックホール外部の観測者（図6のO1）は無限時間かけてこの波のエネルギーを受けますが，CHを横切る観測者（図6のO2）は有限の時間でCHにたどり着くため，波の全エネルギーを一瞬にして受けることになります．このような奇妙な因果構造によって，特異点がCHに沿って発生します．興味深いことに，CHでは球面の半径 r（(1)式の r と同じ座標）はゼロではありません．CHを横切る観測者O2のアフィンパラメーター λ に沿って，球面の面積変化を表したのが図7です．$\frac{dr}{d\lambda}$ はちょうどCH上で発散していますが，$r>0$ なので，CHを通過する有限の大きさを持つ物体はゼロに潰されずに済みます．

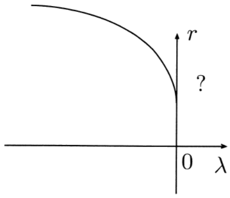


図 7　CH 上で観測者 O2 のアフィンパラメーター λ をゼロにしている．$\lambda=0$ で面積 r の微分は発散するが，面積は有限にとどまる．

ここで，もう一度時空の特異性の定義を振り返っておきましょう．時空が特異であるとは，時空のどこかに少なくとも 1 本アフィンパラメーターを無限に伸ばせない因果的測地線が存在するということです．しかし，アフィンパラメーターを無限に伸ばせるかどうかは，時空の定義に依っていることを忘れてはいけません．例えば極端な例として，時空の各点の計量 $g_{\mu\nu}$ が局所座標 x^μ で無限階微分可能とするならば，我々の世界は到る所にアフィンパラメーターを無限に伸ばせない因果的測地線が存在しそうです．例えば星のエネルギー密度が，星の半径 R を用いて階段関数[*3] $\theta(R-r)$ のようになっているとすると，明らかに $r=R$ で無限階微分不可能です．この密度と計量はアインシュタイン方程式でつながっているので，計量 $g_{\mu\nu}$ も $r=R$ で無限階微分不可能でしょう．

ここまで極端な例でなくても，例えば時空の各点の計量が，少なくとも 2 階微分可能であるという条件は物理的でしょうか？ この条件は，特異点定理を証明するのに必要な条件ですが，先の電荷を持った重力崩壊の例では，物体は CH で体積ゼロまで潰されないので，その先まで行けそうです．当然 2 階微分可能を時空の各点に要求すれば，CH は時空の点から除くことになり，有限の長さで終わる因果的測地線が存在するでしょう．ホーキング・ペンローズの特異点定理はこのような弱い時空の特異性を予言しているのでしょうか？ 特に正の宇宙項[*4]のある時空では，第一量子化された弦が適当な質量，電荷の値で無限に励起されることなく CH を通過することがわかっており，量子力学の立場にたっても，CH 上の特異点はあまり害はなさそうです[7]．

一方で，その地平線の点も時空点に入れるという立場を取ると，さらにやっかいな問題が発生します．図 6 から明らかなように，$r=0$ は時間的な特異点で，曲率の発散が非常に強いため，そこに近づく物体は無限に小さく潰されてしまいます．アインシュタイン方程式は非線形偏微分方程式ですから，CH より先で時空の時間発展を見ようとすると，$r=0$ で何らかの境界条件を課す必要があります．しかしながら，$r=0$ でどのような境界条件を課して良いのかわからないため，先ほどのスカラー場や光，または未知の物質が $r=0$ の特異点から限りなく放出されてくるかもしれません．時空を CH から先に伸ばせたとしても，今度はその先何が起こるか予測不可能となって，物理にとって深刻な問題に直面します．このような問題は宇宙検閲仮説問題[8]と呼ばれていて，今でも未解決の問題です．

特異点定理は数学的に厳密な定理ですが，特異点定理によって保証される無限に伸ばせない因果的測地線の存在は，重力崩壊などの現実的な問題で何を意味するのか再度検証する必要がありそうです．

*3)　$x<0$ で $\theta(x)=0$，$x>0$ で $\theta(x)=1$ という関数．

*4)　アインシュタインが静的な宇宙を作るために導入した宇宙定数．現在の観測では，この宇宙項が存在すると言われている[6]．

参考文献

1) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis; *The large scale structure of space-time*, Cambridge, 1973.
2) 佐藤文隆，小玉英雄『一般相対性理論』岩波書店．
3) E. Poisson and W. Israel, *Phys. Rev.* **D41**, 1796 (1990).
4) A. Ori, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 789 (1991).
5) P.R. Brady and J.D. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1256 (1995).
6) 前田恵一「重力理論入門」最終回，数理科学 (2008 年 3 月号)；SGC ライブラリ 63『重力理論講義』サイエンス社．
7) K. Maeda, T. Torii, and M. Narita, *Phys. Rev.* **D61**, 024020 (2000).
8) R. Penrose, *Riv. Nuovo Cimento* **1**, 252 (1969).

（まえだ・けんご，芝浦工業大学工学部）

情報科学と論理



萩谷 昌己

1. 情報科学で教えるべき論理

筆者は，理学部の情報科学科で,「情報論理」という授業（一学期）を教えている．まず，この授業の内容について簡単に紹介したい[1]．その後で，情報科学の授業の中で，論理に関して何を教えるべきかを少し考えたい．

1.1 情報論理

この授業では，最初に命題論理の構文論と意味論について述べた後，命題論理のコンパクト性について説明する．コンパクト性とは，一般に，論理式の無限集合 Γ があったときに，その任意の有限部分集合が充足可能ならば，Γ 全体が充足可能になることをいう．一階述語論理の完全性の本質的な部分は，命題論理のコンパクト性に還元されるので，命題論理のところでコンパクト性について説明している．

次に，一階述語論理の構文論と意味論について説明する．一階述語論理の演繹体系については，残念ながらシーケント計算や自然演繹などを解説する時間はなくて，ヒルベルト流について簡単に紹介するのに留めている．

そして，エルブラン領域，エルブラン解釈の概念について説明した後，エルブランの定理について詳しく解説する．変数を含まない原子論理式と命題記号を対応させることにより，エルブランの定理は，命題論理のコンパクト性に還元される．なお，エルブランの定理は，限定された形の論理式に対する完全性（恒真ならば証明可能）ということができる．

その後，一階述語論理の一般的な完全性について簡単に述べる．以上が授業の前半である．

後半では，計算可能性と不完全性について述べている．まず，チューリング機械の基本概念について説明する．その一方で，原始帰納的関数，部分帰納的関数，帰納的関数，帰納的に可算な集合，帰納的集合という一連の概念について説明している．そして，チューリング機械によって計算可能な関数と部分帰納的関数が一致していることを解説する．特に，クリーニの述語 $T(e,x,y)$ を導入して，任意の計算可能関数が $T(e,x,y)$ を用いて定義できることを説明する．以上に基づいて，チューリング機械の停止問題について述べる．また，帰納的に可算だが帰納的でない集合の例をあげる．

次に，一階算術を導入する．一階算術とは，足し算と掛け算と比較演算を関数記号もしくは述語記号として持つ一階述語論理のことである．一階算術は，自然数（非負整数）の全体を標準的なモデルとしている．標準的なモデルの下で正しい論理式を証明するために，ヒルベルト流の場合，算術の公理を導入する．

そして，表現可能性について述べる．n 引数の関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が表現可能であるとは，変数 $x_1,\cdots,x_n,y$ を自由に含む論理式 $A[x_1,\cdots,x_n,y]$ が存在して，$f(x_1,\cdots,x_n)=y$ が成り立つことと，

$$\forall y(A[\overline{x_1},\cdots,\overline{x_n},y] \Leftrightarrow y=\overline{y})$$

が証明可能であることが同値になることをいう．ここで，$\overline{x_1}$ は，自然数 x_1 を表す項である．直感的に述べると，関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が表現可能であるとは，その関数の計算が演繹体系の中で実行できることを意味する．

次に，任意の原始帰納的関数が表現可能であることを簡単に説明する．そして，表現可能性を特に（原始帰納的関数である）クリーニの述語に適用することにより，完全性（標準モデルで真ならば証明可能）が満たされないことを述べる．

このように算術の不完全性は表現可能性から即座に導かれるが，最後に，ゲーデルの不完全性について解説する．具体的に，ゲーデル文の構成について述べ，ゲーデル文は標準モデルで真であるが証明できないことを説明する．最後の最後に，ゲーデル文が演繹体系の無矛盾性を表していることを簡単に紹介する．

以上，一学期，十数回の授業で，論理というものについての最小限の知識を網羅しているつもりである．欲をいうと，さらに，等号付き述語論理，プレスバーガー算術，様相論理など，枝葉の部分についても触れたいのだが，残念ながら年を重ねるごとに，内容が少なくなってきている．

1.2 何を教えるべきか

情報科学科は，情報分野の専門家を育てるところであり，論理学の専門家を育てるところであるとはなかなか開き直れない．とすると，論理に関して情報分野で必要とされることとは何だろうか．

近年，少しずつではあるが，形式的手法（formal methods）がソフトウェア開発の中に浸透してきている．形式的手法とまではいえなくとも，プログラミングの過程で，論理的な定式化は日常的に行われている．ハードウェアに関しても同様である．

たとえば，論理式を正確に読める，さらに書ける，ということは，情報のどのような分野であっても必要な教養であろう．ところが，近年，そのような教養が心許ない，という印象を持っているのは，決して筆者だけではないようだ．

知り合いの電気系の近山先生がいっていたが，

Everybody loves somebody. ♪

という文を正確に論理式に直せない学生もいるので，彼の授業では実際にこの曲を歌うことから始めるのだそうだ．いうまでもなく，この文を論理式に直すと，

$$\forall x.\ \exists y.\ Loves(x,y)$$

というようになる．quantifier の順番が心許ないようである．

本来，情報論理は「論理学」を教える授業であるのだが，どうも，「論理」をまずきちんと押さえる必要があるようである．

さらに，集合，関係，関数，順序，同値など，離散数学系の基本概念についても，最近の学生は実に心許ない．たとえば，「同値関係で割る」ということの意味を答えられない学生が多い．

ということで，最近では，論理の前に集合や関係に関する基本概念の解説を少し行っている．正直のところ，ゲーデルの不完全性について解説するより，このあたりの概念について徹底して教え込むほうが有意義なのだろうと思う．

実際に，先に述べた形式的手法においても，形式仕様を書いたり読んだりするためには，論理式に加えて，様々な集合概念を的確に把握できていることが重要である．

2. 計算モデル

かなり皮肉っぽい書き出しになってしまった．しかし，情報科学における論理の役割に関して再考する機会にはなっている．

2.1 論理学の役割

そもそも，いかにして計算概念をモデル化するか，ということが，情報科学から論理学に与えられた役割ではないだろうか．つまり，論理学としての深化を目指すよりも，もやもやとした様々な計算概念を形式化して行くことこそが，論理学の役割ではないだろうか．形式的手法はその成果の一つと考えられる．

計算モデルの研究は，新しい計算概念の提案から始まる．今から60年ほど昔，計算機が登場し始めたころは，そもそも計算機によってどのような計算を行うか自体が茫漠としていた．計算機を作るために，何らかの計算モデルを「でっちあげ」なければならなかった．

近年，このような状況にあるのは，たとえば，インターネット上での大規模計算であろう．特に最近になって，クラウド・コンピューティング（cloud computing）という言葉がうるさく囁かれているが，クラウド（インターネット上に雲のように広がる計算資源）でどのような計算を行うべきかは依然として茫漠としている．また，生物を含む自然界における計算（natural computing）という方向の研究が活発になっているが（筆者も関係している），この方向も茫漠としている．様々な計算モデルが提案されては消えて行く．

提案された計算モデルが成功を収め定着してくると，次のステップでは，計算モデルの定式化が行われる．すなわち，計算モデルから形式体系（calculus）へと進む．プログラミング言語も形式体系の一種と考えられるが，ここではもう少し抽象的な体系を考えている．たとえば，命令的の計算モデルに対しては，命令型言語の普遍的なcalculusを考えることができる．また，関数的な計算モデルに対するcalculusとして，ラムダ計算（lambda-calculus）が考えられる．

ただし，関数的な計算モデルとラムダ計算の関係は，計算機の登場以前に遡る．計算機のための計算モデルという観点からいうと，関数的な計算モデルは，むしろ，形式体系であるラムダ計算に触発された，というべきであろう．

さて，形式体系が固まってくると，次のステップは，形式体系の論理を構築することである．すなわち，数学的な意味論を与えるとともに，公理や推論規則による推論体系を定式化する．いうまでもなく，このステップの課題は論理学の課題でもあり，このことが，近年，計算機科学と論理学が協調して発展してきた所以である．

最後のステップは，先のステップで定式化された論理の機械化もしくは自動化である．実際に，計算機の上で動く様々なツールが作られたりする．それらのツールは，実用的な検証技術に用いられる．

2.2 計算モデルの発展

以上のようなステップを経て，様々な計算モデルに対する論理が定式化されてきた．少し振り返ってみよう．

関数的な計算モデルに関する研究は，特に20世紀の計算機科学と論理学の発展の中心にあったと思う．関数的なモデルの意味論については，カテゴリーによる意味論が発展した．また，形式体系としては，多様な型を持つラムダ計算の研究が進展した．

計算機科学と論理学の様々な関係の中で，型概念ほど多くの実りを生み出したものはないだろう．特に，カリー＝ハワードの対応（Curry–Howard isomorphism）と呼ばれる関係は，計算と論理を一体化させた．

カリー＝ハワードの対応は，型と命題を対応させることから始まる．たとえば，A から B への関数型 $A \to B$ とは，A の要素を入力としてもらって B の要素を出力として返す関数の型である．ところが，この型 $A \to B$ を，「A ならば B」という含意命題に対応させるのが，カリー＝ハワードの対応の基本である．型 $A \to B$ に属する関数は，本来的には，A の要素をもらって B の要素を返す関数であるが，これを，A の証明をもらって B の証明を返す関数と捉える．そして，このような関数こそが，「A ならば B」の証明と考える．これは，含意命題の直観主義的な解釈に基づいている．古典論理では，「A ならば B」は「A でないか B」と等価であるが，直観主義論理では，A が正しいという証拠をもとにして，B が正しいことを示せるときに，「A ならば B」が正しいと考える．したがって，型 $A \to B$ に属する関数は，「A ならば B」の証明とみなすことができる．

以上のようにして，型付きラムダ計算と直観主義論理の対応が確立し，その対応を様々に発展させる試みが活発に行われてきた．その一つは，直観主義論理ではなく古典論理とラムダ計算の対応

を与える試みであろう．たとえば，古典論理を特徴づける推論である「二重否定の除去」は，ラムダ計算における大域脱出という演算に対応することが見出された．

関数的な計算モデルに対して，状態遷移による計算モデルも様々に発展してきた．その基本は命令的な計算モデルであり，変数の値を代入によって変更するための代入文を，if-then-else や while-do といった制御構造を用いて組み合わせることにより，プログラムが構築される．さらに，プログラムの動作を特徴づけるために，ホーアの論理（Hoare logic）と呼ばれる形式体系が与えられた．

ホーアの論理では，事前条件とプログラムと事後条件という三つ組を表明（assertion）と呼ぶが，このような表明を推論の対象とする．すなわち，表明は次のような形をしている．

$$\phi \quad \{P\} \quad \psi$$

この表明は，ϕ という事前条件が成り立っているときに，プログラム P を実行すると，もしも P が終了したならば，ψ という事後条件が必ず成り立つ，と読まれる．ホーアの論理は，このような表明を証明する公理と推論規則を与える．

ホーアの論理は，現在においても，脈々として各種の形式仕様言語に受け継がれている．また，プログラミング言語を，このような表明を記述できるように拡張することも一般的である．たとえば，Java 言語に対しては，JML（Java Modeling Language）が広く用いられている．

動的論理（dynamic logic）は，ホーアの論理を，様相論理（modal logic）の枠組みで捉え直したものである．様相論理とは，様相概念を有する論理で，より具体的には，必然や可能を意味する様相演算子を持つ論理である．たとえば，$\Box$ という様相演算子は必然（necessity）を意味し，$\Box\phi$ という論理式は，「必ず ϕ」と読まれる．

動的論理では，プログラム P に対して，[P] という様相演算子を導入する．[P] は $\Box$ の一種と考えられ，$[P]\phi$ という論理式は，プログラム P が終了したときには「必ず ϕ」が成り立つことを意味する．すると，

$$\phi \rightarrow [P]\psi$$

という論理式が，上の表明と同じ意味になる．

さて，以上で述べた状態遷移による計算モデルは，オブジェクト指向および並行計算という方向に目覚ましい発展を見せる．並行オブジェクト指向は両者が融合した計算モデルである．以下，並行計算について少しだけ述べる．

並行プログラムは，並行に動作する複数の実体（プロセスとかスレッドと呼ばれる）を記述するプログラムである．並行プログラムを表現するための形式体系として，プロセス代数やペトリネットなどが広く用いられている．特に，プロセス代数の一種であるパイ計算（pi-calculus）は，その様々な拡張とともに，並行プログラムの形式体系として定着している．

並行計算のための論理の研究も盛んに行われた．動的論理を含む様相論理はいうまでもなく，並行計算にとって重要なリソース概念の定式化のために，線形論理（linear logic）が発展した．並行計算では，複数のプロセスやスレッドが，一つのリソースを奪い合うのが一般的である．リソースとは，計算機の通信チャネルとかファイルとかロックなど，計算機の各種の資源を抽象化した概念である．線形論理は，極めて簡単にいうと，命題 A が 1 回成り立つことと，命題 A が 2 回成り立つことを区別するような論理であり，リソースの取得や開放を自然に表現することができる．

さらに，実時間的な制約の下で動作するプログラムのための計算モデルの研究も，組み込みシステムの重要性が増すにつれ，盛んに行われてきた．一般に，状態が離散量と連続量から成る計算モデルは，ハイブリッド・システム（hybrid system）と呼ばれる．たとえば，時間とともに連続的に増加するクロックを持つシステムは，典型的なハイブリッド・システムである．より一般的に，時間とともに連続的に変化する物理量を取り込んでもよい．このような物理量により，組み込みシステムを取り巻く外界の環境をモデル化することがで

きる．

また，別の方向として，確率的な状態遷移を行う計算モデルも様々に研究されてきた．確率は連続量であるので，このような計算モデルも一種のハイブリッド・システムとなる．

以上のようなハイブリッド・システムに対する論理についても，たとえば，実時間を扱うことのできる様相論理なども含めて，様々な試みがなされている．状態が様々な種類の連続量を含むのに対応して，論理的な推論の目標についても，単純な真偽だけでなく，計算量や（電力などのエネルギーも含む）計算コストなど，様々な尺度を推論する試みが多く行われている．この具体的な事例については以下で少しだけ述べる．

3. 筆者の周辺

ここで，筆者の周辺で行われている研究について簡単に紹介したい．これらは，この分野の現在のメインテーマというわけでは決してない．主として筆者の興味に従った研究であるので，アドホックな具体例として参照していただければありがたい．

3.1 min-plus 代数上の論理

自然数の全体 $\mathbb{N}$ に ∞ を追加した集合 $\mathbb{N}\infty$ は，min と足し算 $+$ によって熱帯代数（tropical algebra）を成す．熱帯代数の公理をあげることはここではしないが，たとえば，∞ は min に関する単位元であるが，$+$ に関しては吸収的 $(x+\infty=\infty)$ である．なお，熱帯代数は，この代数を研究したブラジルのシモンという研究者にちなんで，このように呼ばれるようになったそうである．ともかく，min-plus 代数（もしくは順序をひっくり返した max-plus 代数）は，離散システムの最適化などで用いられる由緒正しい代数である．

最近，筆者たちは，min-plus 代数を用いて論理式，特に様相論理式を解釈する試みを行っている．この解釈では，$\wedge$ を $+$ で，$\vee$ を min で解釈する．また，真は 0 で，偽は ∞ によって，真偽値を解釈する．ただし，0 と ∞ の間にある $1,2,3,\cdots$ も，有限であるということで，真の一種と考える．すなわち，真の値にはレベルがあって，0 が絶対的な真であるのに対して，$1,2,3,\cdots$ は中途半端な真である．したがって，論理式を解釈することにより，真か偽だけではなくて，min-plus 代数の要素によって表される何らかの尺度を計算することが可能である．

より具体的に，様相論理の一種である様相 μ 計算（modal mu-calculus）を用いると，有向グラフ上の様々な性質を論理式で表現することができる．様相 μ 計算は，様相演算子に加えて，真偽値に対する最大不動点と最小不動点を持っているので，たとえば，グラフのあるノードから別のあるノードへ到達可能かどうか，といったことを，論理式によって表現可能である．

様相 μ 計算を min-plus 代数上で解釈すると，同じ論理式によって，あるノードから別のあるノードへ到達可能かどうか，だけではなくて，到達可能な場合，最短の経路の長さが，その論理式の解釈として表される．

3.2 暗号プロトコルのための論理

暗号プロトコルの解析や検証は，形式的手法の重要な応用分野である．暗号プロトコルも並行計算の一種であるので，たとえばプロセス代数を用いて暗号プロトコルを定式化することができる．また，暗号プロトコルの性質を表すためには，様相論理が用いられることが多い．

しかし，暗号プロトコルの検証を行うためには，確率と計算量という 2 種類の量を考慮しなければならない．なぜなら，暗号プロトコルを実行するエージェントも，暗号プロトコルに対する攻撃者も，確率的な計算プロセスである．たとえば，攻撃者が暗号を破ろうとするとき，どのような暗号であろうとも，たまたま鍵を当てることは有り得る．したがって，暗号プロトコルの安全性は，確率的な安全性，すなわち，攻撃が成功する可能性が非常に小さい，という安全性でしかない．

しかも，攻撃者が無限の計算能力，つまり，無限に速い計算機を持っていたとしたら，すべての鍵を試すことができるので，暗号プロトコルは確実に破られてしまう．したがって，攻撃者の計算

能力と相対的に，攻撃が成功する可能性が非常に小さい，ということを示さなければならない．

より正確に述べると，まず，セキュリティ・パラメターと呼ばれるパラメター η を仮定する．このパラメターは，たとえば鍵の長さというように，プロトコルで用いられる暗号の強さを規定するパラメターである．すると，η の多項式 $p(\eta)$ を仮定して，$p(\eta)$ の計算ステップを実行することのできる攻撃者が攻撃に成功する確率が，η のどんな多項式 $q(\eta)$ に対しても，$1/q(\eta)$ よりも小さい，という条件によって，暗号プロトコルの安全性を定式化することができる．

以上のような安全性を検証するために，論理式の解釈は確率を返す必要がある．また，論理式を解釈する際に，攻撃者の計算能力を規定できなければならない．

3.3 分子反応の論理

筆者は，以上のようなセキュリティに関連した「安心・安全」を目指す研究の他に，生物を含む自然界における計算という方向の研究も行っている．特に，分子（主にDNA分子）の反応を用いた計算システムの構築を目指している．

先に述べたように，計算モデルの研究は，今までにないような計算モデルの提案から始まる．この段階では，「あやしい・あぶない」研究というべきだろう．最終的に，計算モデルが定着し検証を行うところまでに成熟すると，世の中の「安心・安全」に役立つことになる．上述の分子反応による計算システムの研究は，このような「あやしい・あぶない」段階にあるものだ．

しかし，分子反応の計算モデルは，研究の対象として非常に興味深い側面を多く有している．分子反応は，連続的な濃度という量によって捉えることができるが，これは分子の数が十分に多い場合であり，細胞の中のように分子の数が小さいと，分子反応は確率的なプロセスとなる．すると，分子反応の計算モデルは，暗号プロトコルの際に述べたような，確率的な計算モデルになる．ただし，数が十分あるような分子の種類に対しては，連続的な濃度で捉えられるので，ハイブリッド・システムとしてモデル化することが適当だろう[2)]．

その一方で，計算量に相当する量としては，エネルギーやエントロピーが考えられる．つまり，エネルギーやエントロピーの制約の下で分子反応が起こるので，このような制約を考慮して，システムの解析や検証を行わなければならない．

4. おわりに

最後の節で，筆者の周辺のいくつかの研究をアドホックに紹介したが，遠目に眺めて見ると，同じような方向を向いていることがわかる．

* 計算量やエネルギーなど，何らかの制約の下で，確率や連続量に関連した性質を論理式によって表現する．
* そして，論理式の解釈を求めることより，確率や連続量に関する条件を検証する．

本稿では述べることができなかったが，以上の観点の他に，計算プロセスが実行される場の状況を定式化することが重要であり，そのような場の概念を導入することにより，計算モデルはさらにバラエティに富んだものとなる[2)]．

今後も，計算モデルの研究は，「安心・安全」と「あやしい・あぶない」を行ったり来たりしながら進んで行くのではないだろうか．

参考文献

1) 萩谷昌己，西崎真也：『論理と計算のしくみ』，岩波書店，2007.
2) 萩谷昌己，山本光晴：『化学系・生物系の計算モデル』，共立出版，出版予定 (2008).

（はぎや・まさみ，東京大学大学院情報理工学系研究科）

数学と論理

素数をめぐって

黒川 信重

1. 数学と論理と素数

数学と論理は切っても切れない関係にある．存在証明でも非存在証明でも論理の力は必要である．ここでは，今から2500年くらい昔のギリシャ数学の精華『素数は無限個存在する』に戻って，論理が数学に登場した最初期の周辺を振り返ってみたい．この結果は，耳にしたことがある，という意味では一般によく知られているが，「無限個存在する」ということを証明する論理については通常ほとんど知られていないのが実情である．その上，ギリシャの証明法を知っていると考えている人たちが，その方法が，いわゆる「背理法」であったと思っているため溝は深い．この俗説は教科書等に書かれ記憶に浸透していて，残念ながら，広く誤解が蔓延している．その論理が「背理法」ではなかったことと，そのために現在に至る豊かな深い問題を投げかけていることを，この解説では強調したい．

素数概念は2500年ほど昔のギリシャにおいて自然数を積に関して分解し尽くすことによって発見された：

自然数→《分解》→素数.

ピタゴラス学派の中で，ほぼ同時期に，素数論と原子論

物質→《分解》→原子

は互いに関連しつつ生じたのであろう．

素数の統合は2000年以上の時空を超え，昨年生誕300年を迎えた大数学者オイラー（1707–1783）の「ゼータ」によってもたらされた（1737年）：

自然数→《分解》→素数→《統合》→ゼータ．

これによって，素数問題に関して，ギリシャ以来2000年ぶりの進歩が得られると同時に，分解の後の統合に至ったのである．来年は数学最大の難問リーマン予想が提出された1859年からちょうど150周年となる．リーマン予想はオイラーの研究の延長線上にあり，ゼータの零点の問題であると同時に素数分布の問題でもある．オイラーがゼータを用いて

$$\text{“}1+2+3+\cdots\text{”}=-\frac{1}{12}$$

という無限大を繰り込む計算をしていたことも注目される（立方和は1/120）．

物理学で扱われる

物質→《分解》→原子・素粒子→《統合》→？

という過程において最終段階「？」とは「統一理論」「量子重力理論」「弦理論」等が来るのだろうか．素数・ゼータの場合と比較してみることは興味深いことであろう．ちなみに，量子力学におけるカシミール効果（1948年に予言，1996年に実験確認）がオイラーのゼータ繰り込み値

$$\text{“}1+2+3+\cdots\text{”}=-\frac{1}{12}$$

を理論値（立方和も）としていることは，素粒子

と素数の不思議な縁を感じさせる．

このように，数学においてもっとも古い概念の一つである「素数」が現代に至るまで最先端の課題を提示していることに，改めて驚かされる．素数が根本概念であることの証左であろう．素数は現代数学に至るまで数学発展の原動力を与え続けて来たのは上記の通りであるが，ついでに，素数は現在の日常生活でもなくてはならないものになっていることにも触れておこう．実際，日常的に使っているICカード（銀行，スイカ，パスモ，…）等のセキュリティの暗号の鍵は素数である．素因数分解は大きい自然数になると困難が急激に増大する．逆に，素数の積を計算することは容易である．これが，現代暗号に素数が使われる理由であり，第三者による暗号解読が数千年を要するような困難な素因数分解によって阻止されている．この意味で，素数は現代情報社会の基礎にもなっている．

2. 素数とは

素数は良く知っている，と言われる方も多いのであるが，念のため，素数の解説から始めたい．素数は数学の根本概念であり，

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \cdots$$

のように，自然数（正の整数）のうちで1より大きな2つの自然数の積に分解できないものを指す．素数は紀元前500年頃のギリシャ時代から考えられてきている．始まりは，きっと，ピタゴラスや彼の学校（研究所）の人々が，自然数を掛け算に関して分解し尽くし，それら素になるものの研究から世界の成り立ちを調べたい，と思ったのが動機だったのであろう．ほぼ同時期のギリシャには物質を分解し尽くすと原子（アトム）になるというデモクリトス（彼もピタゴラス学校に属していたという）たちの唱えた原子論も起こった．考え方は同一であり，しかも，ピタゴラス学派ではすべては数で理解できるというモットー『万物は数なり』を持っていたのであるから，なおさら，素数論と原子論は同じ関連で生じたのであろう．

なお，「ギリシャ数学」という名称で呼ばれていても，ピタゴラスの開いたピタゴラス学校は現在のギリシャではなくイタリアにあったことに注意しておきたい．それは，イタリア南岸の町クロトン（現在名はクロトーネ）である．クロトンの美しく長く続く砂浜を歩き影を踏みしめていると，その昔にピタゴラスたちが素数に思い致したことが偲ばれる．現在，ピタゴラス学校跡にはヘラ神殿の石柱一本のみが真っ青な地中海を背景に断崖の上に聳えている．著名な数学者であるアルキメデスも現在のイタリアのシチリア島で終生活動していた．ギリシャ数学が栄えたのは（マグナグラキエに属していた）イタリアにおいてであったのである．

3. 如何にして素数が無限個存在することが証明されたか

ギリシャ数学の偉大な成果は「素数は無限個ある」という発見である．しかも，証明もきちんと付けている．2500年経った現在から見ても，なぜそんなことが証明できたのか，真相が知りたい，との思いが強くする．そもそも，誰がどのようにして，その事実を発見したのか，が不明である．たぶん，クロトンの誰かが最初に思いついたのであろう．できればタイムマシンで見て来たい．

彼らの証明は，実際に素数を作り出すやり方であった．記録に残っているのは，ユークリッドの『原論』（出版は紀元前300年頃）に書き留められた方法である．原文（中央公論社からの日本語訳[1]がある）を適当に要約して見てみよう．

『原論』第9巻，命題20
命題　限りない数の素数が存在する．

証明　A, B, Cを異なる任意の素数として，それ以外の素数Dが存在することを示そう．ABC + 1を見よ．これを割り切る素数が存在する．その一つDを取る．すると，DはA, B, Cとは異なる．なぜなら，DはABC + 1を割り切るが，A,

B, C は ABC + 1 を割り切らないから.（証明終）

説明の都合上，ユークリッドは，始める素数をためしに3個にしているが，何個から開始しても同じことなのは明白である．つまり，何個か素数があったら，全部掛けて1を足したものを作り，それを割り切る1でない一番小さい自然数を取り出せば，それは素数であり（素数でなかったとしたらもっと小さいもので割り切れてしまう），しかも新しい素数となっている（それまでの素数では割り切れないので），という作り方である．ここで，割り切る素数なら何でも良いのであるが考えを確定させるために，最小素因子に限定しておいた．

例えば，素数2から始めてみると，全部掛けても2のままで，1を足すと3が出る．これを割り切る1でない最小の数は3である．こうして，2の次に3が作れた．2, 3からは全部掛けて6，1を足して7が出る．よって，3個の素数2, 3, 7が出た．次には，全部掛けると42で1を足すと43となり，4個の素数2, 3, 7, 43ができた．その次は，全部掛けると1806，1を足すと1807．これを割り切る1でない最小の自然数は，1807が13と139の積になることから，素数13とわかる．このようにして，5個の素数2, 3, 7, 43, 13が得られた．これを続ければ，1個ずつ増えていき，結局，素数が「限りない数」すなわち無限個出てくることがわかる．素数が小さい順に出てくるわけでないこともこの例は示している．

念のため，別の例も記しておこう．素数11から始めてみると，全部掛けても11のままで，1を足すと12が出る．これを割り切る1でない最小の数は2である．こうして，11の次に2が作れた．11, 2からは全部掛けて22，1を足して23が出る．よって，3個の素数11, 2, 23が出た．次には，全部掛けると506で1を足すと507となり，507が3と169の積になることからこれを割り切る1でない最小の自然数は3である．こうして4個の素数11, 2, 23, 3ができた．その次は，全部掛けると1518，1を足すと1519．これを割り切る1でない最小の自然数は，1519が7と217の積になることから，素数7とわかる．このようにして，5個の素数11, 2, 23, 3, 7が得られた．これを続ければ，1個ずつ増えていき，再び，素数が無限個出てくることがわかる．

この，素数を次々に製造して行く簡明なトリックは2500年位前のギリシャ時代の偉大な数学者の存在を確信させるが，残念ながら，これまで名前を特定されていない．（この方法の変型については最終節参照.）

4. 背理法による証明との違いは

素数が無限個存在することについて，世間に流布しているのは次の方法である．

背理法による証明：素数が有限個 A, B,···, C だったとしよう．そのとき，AB ··· C+1 を考えると，この自然数はどんな素数 A, B,···, C でも割り切れず，したがって，素因数分解が不可能となる．これは，矛盾である．（証明終）

もちろん，この証明に先立ち，『自然数は常に素因数分解が可能である』ことを証明しておくのである．通常，背理法を使うときには，何が何と矛盾するのか，についての真っ当でない理由付けも多く見かける．上記の場合は素因数分解の可能性に矛盾する，というのが正解である．背理法では，どこかで矛盾が出れば論理上良いのではあるが，実際に使用する際には，勝手に内部矛盾（計算間違い，不等式の左右取り違え，等々,）をせぬよう，「フェルマー予想の無数の証明失敗」で味わった長年にわたる経験を，他山の石としたい．

この方法の欠点を一つ述べると，素数が無限個存在することの証明としては納得できたとしても，素数がどれほど存在するのかという根源的問題に研究を深める方向への積極的展開が困難であるということである．一方，ギリシャの素数構成法は次々と素数を製造することができて，素数分布問題の関心をかきたてる（最終節参照）．この点は，研究において大変重要な違いである．

5. ゼータ：分解し尽くした上での統合

さて，自然数を素数に分解したままで良いはずはない．それらを統べて再統合するのが素数をまとめ上げる「ゼータ」である：

自然数→《分解》→素数→《統合》→ゼータ．

素数全体に関する積（オイラー積）

$$\zeta(s) = \prod_{p:\ \text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}$$

が最初のゼータであり，等式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

は自然数の素因数分解（可能性と一意性）を表現している．ゼータの研究は，オイラーの 1737 年の大発見「素数の逆数全体の和は無限大」から本格的に始まった．このとき，ギリシャ時代に素数が無限個あることが知られて以来 2000 年以上の歳月を経てはじめての進歩がオイラーによって得られたのであった．オイラーとゼータについて詳しくは参考文献の 2, 4, 5, 8) を参照されたい．

ゼータとは「素数のまとめ上げ方」であり，オイラーの第一の発見以来，今日に至るまでに無限個のゼータが知られている．オイラーはゼータを用いて，素数が無限個あることを証明した．実際，もっと強く，素数の逆数和が無限大であることを証明したのである．この方法は，現代まで続く「ゼータ」の源流であり，素数分布の様子をリーマン予想まで昇華する．もっとも，リーマン予想も素数分布問題からすると，最終的な解答を与えているわけではないが．

この際に，再統合するのならもともと分解しないでおけばよいであろうとの意見も聞かれるかも知れない．自然数のままで，自然に統一されているのだという観点である．しかし，考えるまでもなく明らかなように，素数に分解しないで自然数の何がわかる（わかった）というのだろうか．これは，原子論にしないで自然について何がわかる（わかった）のだろうか，と反省してみてもよい．

素数への分解の有効性を実感するには，素数への分解とゼータへの統合が威力を発揮したフェルマー予想の証明（ワイルズ 1995 年）とそれを幾倍にも深化し拡大した佐藤–テイト予想の証明（テイラー 2006 年）を観るのがわかりやすい[8]．

なお，ゼータ関数は通常，素数に関する無限積（オイラー積という）になるが，そのオイラー因子（各素数における成分）の有理性を示す際に，論理数学（モデル理論）が使われることがある．この傾向は，井草準一の創始した井草ゼータの場合に特に著しく，多方面からの研究がなされている．数論においては，ハッセゼータがしばしば研究の中心を（類体論や非可換類体論や谷山予想やラングランズ予想において）担ってきたが，井草ゼータの哲学的な広大さに未来を注目したい．

6. 素数はモノかコトか：モノからコトへ

素数は，かつてモノとして研究されてきた．数としてのモノである．一方，素数をコトとして見るのは何を意味するのだろうか？ 端的にはコトは作用を意味する．素数の作用，あるいは作用としての素数とは何であろうか．現在の素数研究とゼータ研究において考察を求められているのが，その点である．例えば，リーマン予想の対応物まで解明されているセルバーグゼータは，セルバーグ（A. Selberg, 1917 年 6 月 14 日–2007 年 8 月 6 日）の創始したゼータであるが，多様体や群のゼータである．その際の「素数」は上半平面等への作用を持っていて，そのことが，ゼータが解明できた鍵であった．基本的には，群の元は「コト」である．また，その場合の「素数」は「閉曲線（測地線）」ともなっていて，物理学における一つの傾向である「点模型」から「弦模型」への変更に類似であるのも面白い[5]．通常の素数の場合も「(一元体上の) 絶対数学」の視点から「コト」としての研究が進展していて，その成果に期待される．これは，圏（カテゴリー）論的観点からは，モノとしての「対象（オブジェクト)」，コトとしての「射（モルフィズム)」の区別に対応している．もっと明確には，「対象」は「0–射」とみなし，通常の「射」は「1–射」とみなす見方が透明な視点を与えてい

る．ここには，必然的に，高次射も考察の対象になる．さらに進んで，圏論的ゼータ関数論の研究も行われている[6,7]．素数の「コト」としての特性は一層明瞭になることであろう．

7. ギリシャの素数構成法に関する未解決の興味深い問題

おわりに，一つの古くて新しい未解決問題を紹介しておきたい．

問題　第3節のようにして作られる素数列

2–3–7–43–13–53–5–6221671–

38709183810571–139–2801–11–17–5471

…

に，すべての素数が出てくるだろうか．他の素数から出発した

11–2–23–3–7–…,

17–2–5–3–7–…,

99109–2–3–5–7–11–13–…

等ではどうだろうか？ これは，とてつもない難問に見える（実例計算も桁数が大きくなり困難）．素数の未知の領域を示唆しているのであろう．最近，ゼータを用いた研究も行われている[3]．

変型1　「それまでの素数を掛け合わせたものに1を足し，その最小の素因子を取り出す」方法の代わりに「それまでの素数を掛け合わせたものに1を足し，その最大の素因子を取り出す」にすると，例えば，2から始めた場合には

2–3–7–43–139…

という風になる．ここには，すべての素数が現れることはないことが証明できる．例えば，5は絶対に現れない．［ヒント：4で割った余りに注目する.］

変型2　「それまでの素数を掛け合わせたものに2を足し，その最小の素因子を取り出す」によっても，素数を作り出すことができる．例えば，3から始めると

$3, 5, 17, 257, 65537, \cdots$

となる．ここに現れているのは有名なフェルマー素数（未だ5個しか発見されていない；ガウスが証明したとおり，正多角形の作図はフェルマー素数に関連しており，正3角形，正5角形，正17角形，正257角形，正65537角形は作図可能）である．ただし，… に次に現れるのはオイラーが発見した641である．この素数の列にはすべての奇素数が現れると思われるが，これもまた，未解決の問題である．

変型3　「それまでの素数を掛け合わせたものに2を足し，その最大の素因子を取り出す」にすると，例えば，3から始めた場合には

$3, 5, 17, 257, 65537, 6700417, \cdots$

となるが，ここには，例えば7は絶対に現れない．［ヒント：3で割った余りを見る.］

参考文献

1) ユークリッド『原論』中央公論社.
2) 黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と12連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007年10月.
3) 黒川信重「ユークリッド素数列」『数学セミナー』2008年5月号.
4) 黒川信重「三角関数への列車の旅」『数理科学』2008年7月号.
5) 黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店，2006年12月.
6) 黒川信重「絶対数学」『現代思想』2000年10月増刊号『数学の思考』青土社.
7) 黒川信重「ゼータから見た空間」『現代思想』2006年7月号 116–121.
8) 黒川信重「佐藤–テイト予想の歴史」「ゼータ関数入門」『数学のたのしみ（最終号）』特集「佐藤–テイト予想の解決と展望」2008年6月.

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

ゲーデルの不完全性定理

それは何であるか，何でないか

八杉　満利子

1. ゲーデルの不完全性定理：その形

ゲーデルの「不完全性定理」は原論文[5)]の中の定理 VI と定理 XI のことで，通常それぞれゲーデルの第一不完全性定理，第二不完全性定理，と呼ばれている．これらを，技術的な用語を最小限にとどめて述べてみよう．

（第一不完全性定理） 数学の形式的体系について，それが十分内容豊富でかつ無矛盾ならば不完全である．

（第二不完全性定理） 数学の形式的体系が十分内容豊富でかつ無矛盾な場合に，その無矛盾性はその体系自身の中では証明できない．

数学の形式的体系とは，いくつかの記号と記号の使い方の約束ごとを使って数学の命題を論理式というもので記述し，論理式の論理的な変形規則に従って定理の証明を行うシステムのことである．例えば「すべての自然数は偶数か奇数だ」という定理は $\forall n \exists m. n = 2m \vee n = 2m + 1$ という論理式で表される．論理的な変形規則には，例えば“すべての”を表す記号 $\forall$ の意味を表現する規則や数学的帰納法などがある．

数学の形式的体系が十分内容豊富であるとは，通常の数学の証明がその中で書ききれる，という意味である．

体系が無矛盾であるとは，ある数学の命題とその否定がともに定理になることはない，という条件である．体系が不完全であるとは，ある命題についてそれ自身もその否定も形式的体系内で証明されないことである．どちらかは正しいはずなので，「正しくても証明されない命題がある」ということになる．

ここで注意すべきことは，内容豊富ではあっても，形式的体系が数学そのものであるとは限らないことだ．ゲーデルは形式的体系について 2 つの不完全性定理を正確に述べ，厳密な数学証明を与えた．

不完全性定理の証明のエッセンスは，記号のコード化によって「… は証明不可能である」という内容を表す論理式を構成し，「…」の部分にその論理式のコードを表す記号を代入する，という操作にある．いわば自分自身の証明不可能性を主張する論理式を構成し，それ自身もその否定も体系の中で証明不可能であることを示した．「自分が証明不可能」という文は一種の自己言及であり，自己言及は「この文は偽である」の例のようにパラドックスの源泉になる．ゲーデルの証明がパラドックスに陥らないのは，自己に関する主張が「偽」でなく「証明不可能」だからだ．

2. 社会現象としての不完全性定理

ゲーデルの不完全性定理は「数学の形式的体系」という人工的な体系についての性質であり，普通人間が実行している数学そのものに関するものではない．それなのに数学についての，さらには様々な社会現象についての文脈で語られることがある．なぜなのだろうか？

第一に，「数学の形式的体系」を，「の形式的体系」の部分を無視して「数学」と読み替える人がいるのだ．その結果ゲーデルの定理が数学そのものについて言及しているかのように誤解され，擬似不完全性定理が流布してしまった．擬似第一不完全性定理を述べてみよう：数学は内容が豊富で矛盾していなければ，不完全である．

数学の形式的体系イコール数学そのものであれば，「内容は十分豊富」なはずだ．また，現場の数学者は数学の無矛盾性を信じているのだから，「擬似第一不完全性定理」から「数学は不完全だ」という結論が導かれてしまう．ある数学の命題について，事実としては正しいのに，人は決してそれと知ることができない，という一種根源的な悲しみを提示しているようにさえ見える結論だ．実際にはそれは「の形式的体系」という文言を無視した人災と言える．さらに擬似不完全性定理の拡張として，人知の限界説まで見たことがある．

第二の理由は，ゲーデルの証明の本質が自己言及という手法にあることだ．自己言及の問題は社会の様々な場面で取り上げられるのでなじみやすいのだろう．自己言及に関連してゲーデルの名が引用されることがある．第三の理由は，ゲーデルの定理の意義は19世紀末から1930年まで続いた「数学の基礎付け」という活動，すなわち「数学基礎論」の歴史の中で考えられるべきものだ，という事実にある．そのために，形式的体系が「数学」にすり替えられる危険性が生じるのだ．

数学基礎論の柱であり，ゲーデルが数学の形式的体系の問題に取り組んだ直接の背景である「ヒルベルト計画」は次のことを目標にしていた．すなわち，数学の形式的体系を賢く設定すれば，それは通常の数学を十分反映し，しかもその無矛盾性が比較的単純な方法で確立される．ゲーデルの2つの不完全性定理はヒルベルト計画に対して否定的な結末をもたらしたと言える．しかしその後ヒルベルト計画は多少方向転換して引き継がれてきた．また，ゲーデルの証明手法は形式的体系と現実の数学の間を往復するもので，それが後世の形式的体系の研究に大きな影響を与えている．

以上の解説では，不完全性定理の証明という壮大な建造物の門が見えた程度だ．その詳細や背景を知るための書籍は数多くあり，インターネットで容易に情報を得られる．各人の好みで選ばれればよい．ここでは私がかなり読み込んだものか，出版に関わった関連文献のみを挙げている．

ゲーデルの仕事を正確に知りたい人にはもとの論文を薦める．和訳[4]でもよいし，原文[5]または英訳[6]でもよい．原論文は記号論理学の基礎と多少の数学的思考力と根気だけあれば読める．これをしっかり読めば，ゲーデルの定理は「何であるか，何でないか」が明確に分かるはずだ．数学基礎論の歴史は文献4)の解説に詳説されている．他は関連読み物である．

参考文献

1) 林晋：『ゲーデルの謎を解く』，岩波科学ライブラリー，岩波書店 (1993).
2) 林晋編：『パラドックス！』日本評論社 (2000).
3) 八杉満利子・林晋：『お話・数学基礎論』，ブルーバックス，講談社 (2002).
4) 林晋・八杉満利子訳・解説：『ゲーデル 不完全性定理 5刷』，岩波文庫，岩波書店 (2008).
5) Kurt Gödel: “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”, Monatshefte für Mathematik und Physik (1931).
6) Kurt Gödel: “Collected Works”, vol.I, Feferman *et al.* eds., Oxford University Press (1986).

（やすぎ・まりこ，京都産業大学名誉教授）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

サイエンスの香り

細谷　暁夫

少し前にカミオカンデに光電子増倍管を供給し小柴先生のノーベル賞に大きく寄与した浜松ホトニクスの書馬社長が，日本人は明治のときに西洋からサイエンスを輸入したときに，それを科学すなわち近代技術の基礎をあたえる諸学であると「誤解」をしたという趣旨の講演をした．私はそのテープを聴かせて貰って，感銘を受けた．浜松ホトニクスが光科学の分野であげた大きな成果は，まさにレオナルド・ダビンチの意味でのサイエンスであると思う．

その後で，イギリス人の友人がアンリ・ポアンカレの『科学と仮説』について話してくれたときに，サイエンスが西洋社会の歴史において革命的ともいえる先鋭な思想であることを少し理解できる気がした．神学者トマス・アクイナスが信仰上の真実と科学的真実の分離というダブルスタンダードを導入して教会の権威を守ったことに対して，ポアンカレが真実は一つであると述べているのは，勇気のいることだったと思う．一見，淡々と書かれているが，著者の毅然としてサイエンスの側に立つ姿勢が背後にあるのである．

学部の2年生のときに，量子力学の勉強をディラックの教科書から始めて，大いに手こずった．とにかく，初めのほうに線形空間の話が長々と続き，何か物理量の計算ができる気がしなかった．しかし，初めのほうの重ね合わせの原理のところこそ量子力学の大事な部分であることは，講義をする頃になってわかり始め，量子情報科学の勉強をするに従って実感した．この本の題名，The Principles of Quantum Mechanics は明らかにニュートンの『プリンキピア』を意識しているし，伝え聞くところではディラックは脱稿したときには精魂使い果たしていたそうである．この本は，ディラックが世に問うた思想書でもあると私は思う．練習問題つきの教科書たちとは明らかに格が違う．

科学に思想を持つというと，何やら鬱陶しく思う向きもあるかも知れない．今の時代に，自然科学に思想を見るのは普通のこととも思わない．しかし，歴史を振り返れば，例えば相対論において絶対空間の概念を捨てたときにも，大変な勇気を必要としたに違いない．そうでなければ，ワイルが彼の著書に『空間・時間・物質』という気負ったタイトルをつけ，序章にやや長すぎるとも言える哲学的考察を述べるはずがない．新しい思想を述べるときには，当然ながら多くの抵抗があるはずで，それを説得するには丹念な実証と強固な論理が必要だろう．その後者について，今の私たちの用意が十分できているかというと，心許ない．

一方，私が子供のときに父の書庫から持ち出して読んだ，朝永先生の『量子力学的世界像』は，着流しの浴衣風にゆるりと書かれてはいるが，量子力学の本質にせまろうとする点では同じである．波乃光子さんの裁判の弁護士ディラックが，彼女が2つのドアの両方を通ったと主張するという筋立てもガリレオ裁判的な迫力がある．

私が大学院生のときに，本郷で講演された後に朝永先生が学生たちを飲み屋に誘われ，私も末席に居た．そのとき，先生の量子力学の教科書の相対論的量子力学編が出るのかという質問をして，その気はないとはっきり言われたのを覚えている．

その後，朝永先生が病床にありながら書かれた『物理学とは何だろうか』を読んで，本当にお書きになりたかったのはこちらであるのだと，得心が行った．そこには熱力学の歴史を辿りながら，実験を手がかりに推論を進めていく物理学の姿が最も純粋な形であらわれている気がする．しかしながら，後年になって，量子情報科学を通して熱力学と情報量の関係に興味を持ったときに，熱力学の中に物理学の新しい姿を予見するようになった．その意味で，朝永先生のこの本は時代をはるかに先んじているというか，物理学の本道を行っていたのだと思っている．その意味で，この本も上質の思想書であると思う．澄んだ目をした洒脱なお人柄の中に，強い信念を持たれていたのだと今にして思う．

私の個人的な好みを言えば，このゆるりとした自然体で科学について思想を語る朝永先生のようなやり方が好きである．そこには気負いはないが，明晰な論理がいかにも自然に流れている．日本にサイエンスが真の意味で根付くとしても，それが西洋流の強面のするものである必要はあるまい．

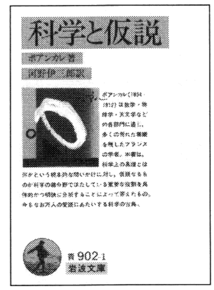
これ以上多言を労すまい．諸兄姉にこれらの名著と直接対峙することを望むばかりである．

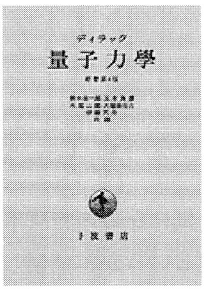
（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

科学と仮説

アンリ・ポアンカレ，河野伊三郎訳，岩波文庫，岩波書店

この本は，科学よって立つ根拠を，仮説を立てずとしたニュートンを批判的に捉えて西洋思想の中の科学の位置づけを述べたものである．明治以来，科学を技術のための基礎学問とした日本人に再考をせまると思う．





量子力学

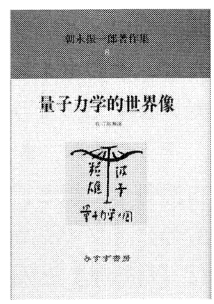
P.A.M. ディラック，朝永振一郎他訳，原書第 4 版，岩波書店

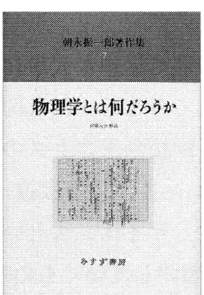
近年の量子情報科学に一番近い書き方をした量子力学の教科書であると思う．物理学を志すものの必読の書であるとともに，量子力学の論理が蒸留水のような明晰さで書かれているので，他の分野の人が読むべき最良の量子力学に関する書と思う．

量子力学的世界像

朝永振一郎，朝永振一郎著作集 8，みすず書房

波乃光子さんが被告の裁判仕立てになっている．波動性と粒子性について量子力学の本質を一般読者を相手に説明した名著と思う．





物理学とは何だろうか

朝永振一郎，朝永振一郎著作集 7，みすず書房

この本は，大佛次郎賞を得ていることからも察せられるように日本語の文章の手本でもある．内容は意外にも，物理学全般ではなく熱力学に終始している．アインシュタインをはじめ大物理学者には熱力学の達人が多いが，現代の若い人の間ではどちらかというと人気がない．実は熱力学の論理の中にこそ，次の時代の物理学の萌芽があると思うのだが．この本の中で朝永先生は，物理学は「実験を手がかりとした自然法則の探求」であると述べて，「実験に基づく」とは言わなかった．

空間・時間・物質（上・下）

ヘルマン・ワイル，内山龍雄訳，ちくま学芸文庫，筑摩書房

この本は，相対性理論の教科書ではあるが，序章に空間・時間概念について注意深い哲学的考察をしており，それが随所で想起されている．



特集／物理と論理

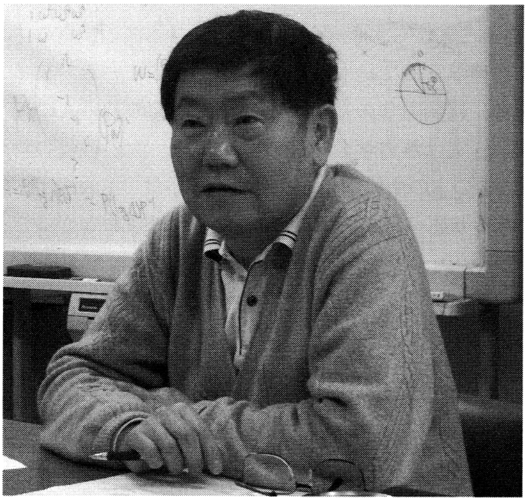
物理における思考と個人主義

細谷　暁夫（聞き手：編集部）

1．今なぜ物理で論理を考えるか

――現在の物理が使っている論理をもう一度捉え直したい，という主旨から今回の特集を組みましたが，そのポイントや背景についてお聞かせいただけますでしょうか．

そうですね，まず歴史的なところから始めると，自然科学の祖と言われるアリストテレスの書いたものに『フィジカ』というものがあります．訳せば『自然学』となるので物理に限るものではなさそうですが，webで見てみました．そこでは第一章の解説が欠落しています．気になるので原本を見てみると，第一章には論理というか言い回しの整理ばかりが書かれてあって，読んでいて退屈なんですね．



細谷暁夫氏．

しかし，よく考えれば，そもそも論理ぬきの物理というのはあり得ません．よく大学の先生方の話では，学問の英語名で「○○ ics」と名のつくものは理屈つきで，「○○ ology」といった類は理屈というより標本を集めてくるものだと聞いたことがあります．politics というのはどうなのか分かりませんが，あれも理屈をこねていると見てよいのかもしれませんが…（笑）．

いずれにしても，今なぜ物理で論理が大事に思うのだろうかとつらつら考えてみると，個人的思考の問題に突き当たります．浜松ホトニクスの書馬輝夫会長兼社長が「サイエンスと科学は違う」といった講演をされています．サイエンスというのは知的好奇心に溢れていて冒険していくもので，科学というのはお勉強するもので，日本人はそれを混同しているとおっしゃってるんですね．私もそう思うのです．サイエンスというのはすごく個人的なものだと思うんです．好奇心っていうのはそもそも個人でしか持てません．集団で好奇心を持つほどグロテスクなものはないと思うんですね．個人で考え抜いたり実験をしたりして，自分の好奇心を満たそうとするわけですが，そういうこと

が根っこにない限り，サイエンスじゃないと思うんですね．それが今，正直いって怪しくなってきているのではないかと思います．巨大科学もそうですし，理論科学でもそうだと思います．みんなで慣れてしまって，みんなで思いこんで，みんなで運動している．何かこういうことをやれば論文になるのかなあと漠然と考えていて，つまり自分できちっとあまり考えていない．

論理というものは平たく言えば言葉です．言葉には2つの働きがあって，一つはコミュニケーション，もう一つは言葉で考える，ということだと思います．個人の働きには，言葉で考える，という要素が絶対に必要ですが，それが今曖昧になってきていると思うんですね．集団思考をし始めている．そして，科学というのはもちろん一人だけでやっていくわけではなくて，同じ志をもった人たちがコミュニケーションをするわけですね．それぞれ一人で考え抜いたロジックをお互いにぶつけ合って，そこで本当は火花が散るわけですがそれが最近は見られなくなっている．

だいぶ昔の話になりますが，渡辺慧さんという日本のダヴィンチのような学者が『時間』（白日書院）という本を出されています．それは物理学者と哲学者の対話になっているんですが，そこでは，物理学の概念規定の曖昧さがかなり暴露されています．物理学者が不用意に言う言葉が矛盾してたり，カテゴリーの誤りを起こしてたりする．

量子力学とか熱力学といった学問には，概念規定をきちっとして論理を進めるということがとても必要で，そうしたことは物理学に十分貢献するものだと思うんですね．本特集の小澤先生もそうしたことの前線をされている方で，それは物理というよりまさに論理の話です．昔から量子力学のEPRパラドクスには，「実在とは何か」という話が出てくるのですが，そこには「実在でないもの」も想定しているんですね．実はそれは変な話で，小澤先生の話には「実在するもの」しか出てこないので混乱がないんです．非常に整理された論理で，素直に受け入れられるものです．それが論理学というものだと思います．それと本特集の田崎先生の『熱力学』（培風館）も論理的に非常に整理されています．彼の本を読んでいるかいないかで学生のでき具合が決まってしまうかもしれません（笑）．

2. 学生に伝えたいこと―論理力を磨くには

――そうした現状の中で，学生が個人的思考をして論理力を磨くには日頃どういったことに目を向けていくとよいでしょうか．

たぶん学生は，すでに論理的なことにこだわっているんだと思います．うまくそういった糸口をつかんであげれば，そういう話をし出すのではないでしょうか．例えば解析力学の講義で，最小作用の原理を説明するのにフェルマーの原理を話すのですが，ある学生は，光が最短時間である距離を進むことを，どうして光はあらかじめ知っているのかという質問をするんですね．実は，フェルマーの原理の背後には波動力学があって波動で近似的に説明できるということ，最小作用の原理の背景には量子力学があることを説明してあげると，学生はとても納得してくれます．こうしたことが学生どうしの間でも，うまくコミュニケーションできるといいですよね．

それと一人で勉強するときは，当り前になりますが古典を読むということが大切です．学問を創始した人たちは，徹底的に考えたはずですから．専門書としては，例えば，ディラックや朝永先生の教科書があり，一般向けにはポアンカレのものがあります．ポアンカレの本には，空間が3次元だということを人間がどうしてわかったか，といったことについて，それは人間が動けるからだと，結構な頁数で書かれてあったり，とにかく考えさせられる話が多いですね．『科学と仮説』（河野伊三郎訳，岩波書店）は世界的名著ですからお薦めです．

そして，とにかく友人と話をすることを薦めま

すね．人と人とが対話をするということはとても大切です．それから，論理というのは真実へ迫る気迫のようなものですから，そういった情熱のようなものは欲しいですよね．

また，これは最近の教育の問題になりますが，学生と教師との対面時間が減っていますね．学生どうしの関わり方も，昔と比べて人間関係が希薄になってきているようにも感じます．傷つくことを恐れて，間合いをあけてつき合うので当然そこには論理も何もなくて，人間関係をいかにそつなくスムーズにこなすかということしかないようにも感じます．日本全体の状況がそうなのか，世界的なことなのかわかりませんが，大人の映し鏡のように，先ほども話しましたがみんなで集団思考をしているように感じます．

3. 講義から広がる世界 ―教師と学生が共鳴するとき

――先生は本特集と同じテーマで大学でも講義をされておりますが，受講生の顔ぶれや反響などいかがでしたでしょうか．

人数は 15 人程度でそのうち 5,6 人が物理の人で，それ以外は電気・機械・情報といった人たちでした．えらく盛り上がるんですね．最後のレポートも皆さんちゃんと書いてきてくれて，内容もそれぞれ自分の分野に関係したような話や全く講義とは関係なくファンタジーを書かれた方もいますし，非常に面白いです．いろんな理屈にこだわる方が多いですし，質問も多かったですね．

学生はいずれ卒業して社会に出ます．講義の内容はあらかた忘れるわけですが，そこに出てきた難所のようなものを考えたり苦悩したことが，全然関係ないところで，あるアイデアのきっかけになったりするのではないでしょうか．計算方法などはほとんど忘れますから．

それに，講義の中で学生の個人的思考と教師の個人的思考がリンクするようなことが，各々の記憶や思い出によく残っていくのではないでしょうか．最後は人と人との出会いということが大切なんだと思います．

いろいろ学力低下など言われていますが，ちゃんと頑張っている学生もたくさんいます．学生を見ていると飽きませんよ．

4. 朝永先生という人―影響を受けたこと

――先生は朝永振一郎先生に強く影響を受けていらっしゃいますが，どんな所に惹かれたのでしょうか．

朝永先生は格段に洒落た方で，あれを真似ろと言われてもひっくりかえってしまいますね．同じ男性としてみても，あれほどハンサムな人がいるのかというほど，物言いから身のこなしやお酒の飲み方まで全部かっこいいですね．

私の父（細谷貞雄）が東京教育大で哲学会をやったときに，朝永先生が学長で挨拶に来られて少し話をしたようなのですが，そのときに父が先生をかなり気に入ってしまって…．もともと朝永先生のお父さんも朝永三十郎という有名な哲学者なのですが，晩年に朝永先生が言ったことに，物理学者が年をとったときにやることには 3 つあるというんですね．一つは物理学の歴史を書くこと，一つは変な理論を立てて顰蹙（ひんしゅく）をかうこと（先生はそれだけは生き方としてみっともないからしたくないとおっしゃっておりましたが），最後は do nothing で，先生は「私は最後を選ぶ」と言ってそれを聞いて父がまたえらく感動していました（笑）．朝永先生は最終的には do nothing でなくて，『物理学とは何だろうか』（岩波書店）という名著で歴史を書かれたわけですが．とにかく私は朝永先生が好きですね．もともと最初から憧れていましたし，『量子力学的世界像』（みすず書房）や，私が大学 1 年のときに朝永先生がノーベル賞をとられて “朝永ショック” と言われましたが，そうしたことがきっかけで理論物理を志しました．それで実際に

本人に会ってまたさらに感動しました．そのときは私が大学院生のときで，朝永先生が東大で講演をされた後に「朝永先生が若い人と飲みに行きたがっているので，諸君ぜひ行きなさい」と言われて本郷の飲み屋にいって話をしたんですね．それが個人的にはとても印象深かったです．

1960年代に，ハイゼンベルクが来日したときに私は追っかけで講演を聞きにいったんですが，そのときのホスト役を朝永先生がされていて，ハイゼンベルクと対等な立場で応対していたことがとても印象的でした．

ハイゼンベルクは，物理学というのは優れてギリシア的だと言うんですね．ところが，朝永・湯川というギリシアの伝統を持たない日本の学者がとてもいい仕事をしている．それが私には謎だったのでそれで日本にやってきた，と話していました．そして，今の物理学はデモクリトスというよりヘラクレイトス的である，とも言っていましたね．それを父に話したらまたえらく感動してしまって(笑)．ギリシア人の最大の功績はロジックですから，そういったことも関係しているかもしれませんが，彼らほどおしゃべりな人たちはいないようです．仕事もせずに一日中おしゃべりばかりしていたようですし（笑）．そうした中で，論理（ロジック）というものを切磋琢磨していったんだと思うんです．ギリシアの伝統が中世ヨーロッパにつながって西欧文明の核となったわけですが，そういったことが物理学のもとになっているとハイゼンベルクは言っています．

このハイゼンベルクと朝永・湯川の話と最初の書馬社長の話を合わせると，私たちは彼らの世代から3,4代目になるわけですが，何だかだんだん堕落して集団思考ばかりして，ギリシアの伝統もなければ朝永・湯川の伝統も忘れてしまっているのではないかと思うんです．だからこそ，この特集の意義があるのではないでしょうか．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2008年3月，
東京工業大学大岡山キャンパス研究室にて)

（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

池田 信行　　　　1978年11月号

1970年代の半ばを過ぎる頃になると，興味の持ち方が似た友人たちから，「確率解析（Stochastic Analysis)」と言う聞き慣れない名前の集会の知らせが来るようになった．この特集：「確率微分方程式」もちょうどその頃企画された．その直前に，伊藤清先生が大枠から細部まで自ら準備された確率微分方程式に関する国際会議が京都で開催され，この分野の発展に大きな影響を及ぼした．例えばMalliavin解析の考えもここで最初に披露された．この特集は，その頃の雰囲気を広い範囲の人に伝えることを目指したものである．それから30年の年月が過ぎて状況は様変わりし，Mumfordが21世紀の数学を語る会合で，新たな考え方の典型的な例として，確率解析の代表的な成果である「無限分解可能な確率測度のFourier変換の標準形と加法過程のLévy・伊藤表現の対応」を挙げるまでになっている（[1]の108頁，[2]）．

近代的な確率解析は，Wienerが，液体の中に浮遊する微粒子の運動を，連続関数の空間W上の確率測度，(Wiener測度P^W)，を用いて捉えたときに始まる．少し遅れてKolmogorovは媒質が一様でなく滑らかに変わる場合の微粒子の運動は本質的に組：$P=$ (Riemann計量，ベクトル場) で特徴づけられることを示した．この運動をPに対応する運動方程式（確率微分方程式）の解より決まる写像$F: W \to$ (軌跡の空間) によるP^Wの像測度として捉えた伊藤[3]の成果により，確率解析の次の転機が訪れる．すなわち，Wiener空間を接空間とする経路空間上の解析と幾何の話が始まる．この後の発展は，確率積分をmartingaleの枠組みで論じた，Doobに始まり本尾，渡辺，国田，Meyer等と続く成果により支えられている．さらに，応用分野での一般化された写像Fの活用や，確率微分方程式の幾何学的な視点からの定式化（伊藤[4]，Eells–Elworthy）等により多様な発展がもたらされる．またCameron, Martin, Kac, 丸山，Lévy等の成果のFeynmanの経路積分と対比した新たな考察や，伊藤–西尾[5]による

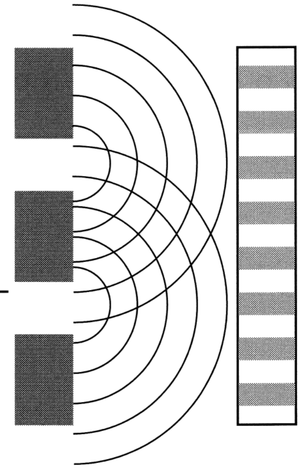


（Wienerに始まる）Brown運動の軌跡のFourier展開等により確率解析の基盤が一層豊かになる．

その後，これらの研究はDonsker–Varadhanの大偏差理論等と相携えて発展を続け，数理ファイナンスの理論を初め数知れぬ課題への応用が広がっている．このことは，伊藤清先生の第一回Gauss賞の受賞に象徴されている．近年，状況はさらに変貌し，数学の数多くの分野の人たちが，確率解析の考えや成果を特別視することなく，あたかも微積分のように自由自在に駆使して研究を行うまでになっている．（文献：[1] Mumford 確率時代の夜明け,『数学の最先端(6)』, シュプリンガー・ジャパン, [2]〜[5]はそれぞれ, K. Itô: Selected Papersの文献番号[1], [2], [23]. [29]）．

（いけだ・のぶゆき，大阪大学名誉教授）

目で見て学ぶ量子力学



第6回 実験でひもとく量子の不思議

二重スリットの実験

外村　彰

6.1 はじめに

電子の波動性を追い求めて，これまで干渉縞ばかりをお目にかけてきた．読者は，電子が波になってしまった気がしていることと思う．だが，それは片手落ちである．電子が2つに分かれた試しはなく，粒子であることは厳然たる事実である．そこで今回は，電子が1個1個の粒子として検出される実験をお目にかけよう．ところが，その粒子性を見ているうちに再び波動性が姿を現すという不思議な光景を目にすることになる．

電子の粒子性を観測するための問題は，如何にして電子を1個ずつ確実に検出できるかである．ノイズのない超高感度のテレビカメラであれば良いのだが，それまでのテレビカメラは，感度を高くすると，ノイズも大きくなってしまって，検出された電子が本物なのかノイズなのかはっきりしない．そこで光子の検出技術にかけては世界に右に出るもののいない浜松ホトニクスに相談して，高感度で低ノイズの2次元検出器を開発してもらうことにした．1986年のことである．

当時，浜松ホトニクスでは，光子を1個1個検出するPIAS（Photon Counting Image Acquisition System）と言う2次元検出器を開発したところで，その電子版を作ってもらうことにした．しかし，光子の場合，光子が100個やってきても，検出できるのはわずか数個であり，これでは美しい実験は期待できない．幸い，1個の電子が持っているエネルギーは光子に比べると何万倍も大きいので，そのエネルギーを使えば，到着した電子を100% に近い効率で検出できると考えた．

6.2 電子1個を検出する2次元検出器

検出器に次々と到着する電子を，1個も逃すことなく検出し，電子の到着位

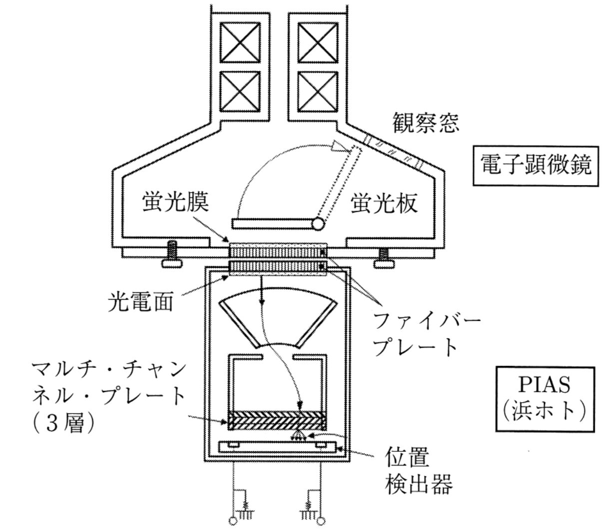


図 6.1　2 次元電子検出器.

置をモニター上に輝点として表示する．しかも，時間とともに積算していく．ちょうど，フィルムに電子がやってきて，次第に像が浮かび上がっていくプロセスを見ていると思えばよい．

この検出器の原理を図 6.1 に示す．5 万ボルトの電子を蛍光膜[傍注1]に当てると，電子は蛍光膜の中で光を出しながらエネルギーを失っていく．厚さ 30 μm のとき，1 個の電子は，およそ 500 個の光子を生じる．そのうちの半分は電子線が入射した面から，もう半分は反対側の面から外に出ていく．電子は蛍光膜の中で何回も散乱するので，光は電子の入射した点から出ているのではなく，膜厚の 1.5 倍の直径のスポット（50 μm の直径）から出てくるように見える．この光を単に検出すればよい訳ではない．電子の到着位置を知る必要がある．このため電子が到着して 1 点で光っている蛍光膜の画像を，そのまま PIAS の光電面[傍注2]に伝達する必要がある．蛍光膜は電子顕微鏡の中に設置してあり，光電面は別の装置（PIAS）の中にあるため，光学レンズ系を使って結像させてもよいが，ロスが多くなるので，両者を密着させればよい．しかし，そうするには，PIAS を電子顕微鏡の真空中に取り込まなければならない．それを避けるために，2 枚のファイバープレート[傍注3]を使うことにした．ファイバープレートを 2 枚使って，それらの面を密着させれば，真空を破らずに電子顕微鏡内部の蛍光膜の像をそのまま PIAS の光電面に伝えることができる．

PIAS の光電面から出た光電子は 3000 ボルトで加速されてマルチ・チャンネル・プレート[傍注4]に入り，10^7 倍に増幅され，位置検出器に入る．ここで，さらに 100 倍増幅される．電子の到着位置の情報は，位置検出器の 4 辺にある出力電極に流れるパルス電流を測定してパルス到着時間として読み出すことができる．電子の到着位置から電極までの到着時間によって電極までの距離が分かるので，電子の到着位置が分かる．それをモニター上の輝点として表示する．

[傍注1]　蛍光体でできた膜で，電子が当たると光を出す．

[傍注2]　光を当てると電子を放出する表面のことを，“光電面” と言う．

[傍注3]　細いガラスファイバーを何本も束ねて板状にしたもの．上面に結んだ光の像がそのまま下面に伝達される．

[傍注4]　細いパイプをたくさん束ねた板状の画像増幅器．電圧のかかったパイプの中に電子が入ると，2 次電子が連続的に発生し増幅され，暗い画像が明るくなる．たくさんのパイプで電子の画像を増幅するので，マルチ・チャンネル・プレートと呼ばれる．

6.3 二重スリットの実験の歴史

光の二重スリットの実験は，1807 年という大昔にイギリスの T. ヤングが，2 つのピンホールを使って行った．“ヤングの実験” とも呼ばれ，光の波動説の基礎となった．

極めて細い 2 つのスリットを作って電子の干渉縞を観測した（図 6.2）のは，チュービンゲン大学の G. メレンシュテットの弟子である C. イェンソンで，1965 年のことである．この実験は，まさに電子の波動性を直接示している．

二重スリットに入射する光（電子）の強度を極めて微弱にしていったらどうなるだろうか？ 1909 年イギリスの G.I. テイラーは，入射光を極端に弱くしたときに，針の影の領域に作られる回折パターンがどのように変わるかを調べるべく，驚くほど根気のいる実験を行った．電子の発見者である J. J. トムソンは，「入射光の強度を非常に弱くして，光のエネルギーをこれ以上分割できないほど小さくすると，従来観察されていた干渉模様とは異なった模様が得られるのではないか」と予言していた．テイラーの実験では，光線があまりに弱いので 1 枚の写真を撮るのに 3 カ月もの長時間露光を必要とした．待ち時間が長くて，テームズ川で舟遊びをしていたと言う．これだけ長い時間露出をして得られた回折パターンも，通常のパターンと全く変わらないという結果が得られた．もしもテイラーが舟遊びに行かずに PIAS のような装置で回折パターンのでき方を観察していたら，光子を発見していただろう．

ノーベル賞受賞者の R.P. ファインマンは彼の有名な物理の教科書の中で，こう述べている．「電子を間をおいて送ったときの二重スリットの実験は，まさにミステリーであり，古典的には解釈できない．ここに量子力学の真髄がある．しかし，この実験は，スケールが非常に小さいので，そのままの形で行うことはできない」．

このファインマンの思考実験が，電子 1 個を検出する高感度 2 次元検出器などの先端技術によって実現可能になった[1]．

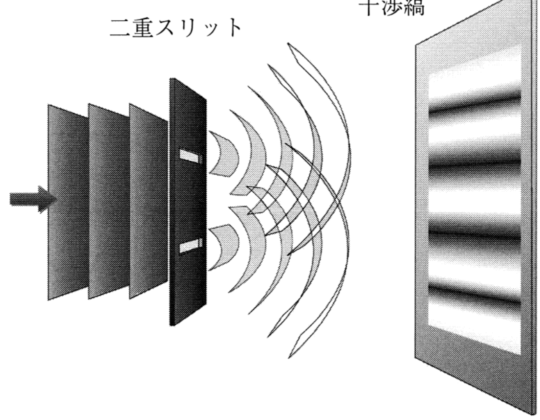


図 6.2　二重スリットの実験．

6.4 電子の二重スリットの実験

実際の実験配置を図 6.3 に示す．針先から出た電子線を，レンズで平行にして電子線バイプリズムに入射する．この実験では，二重スリットの代わりに電子線バイプリズムを使った．スリットを用いると，スリット間隔などの実験条件を変えるのが簡単ではない．電子線バイプリズムでは，同等の操作を自在に行うことができる．プリズムの中央には，太さ 0.3 μm という極めて細いフィラメントが張ってあり，正の電位がかかっている．負の電荷を持った電子が，フィラメントの左右を通ると，正の電荷に引き寄せられる．偏向される角度は，フィラメントの両側で逆向きだが，入射位置によらず一定である．つまり，電子源は，2 つの虚電子源[傍注 5] に分かれることになる．電圧を増やすと，その距離が大きくなり，スリットの間隔を増したことに対応する．左右の電子線は後方で重なり合うが，そこに感度の高い 2 次元検出器を置く．到着した電子 1 個 1 個がモニター上に表示され積算されていく．

[傍注 5] 本物の電子源は 1 つしかないが，そこから出た電子源の半分は電子線バイプリズムの右側を，他の半分は左側を通る．右を通った電子線は左に曲げられ，左を通った電子線は右に曲げられるため，後方の蛍光面から見ると，あたかも電子源が 2 つに分かれ，2 つの電子源から電子線がやってくるように見える．これを虚電子源と呼ぶ．

この実験の狙いは，ファインマンの思考実験をそのまま実行することにあった．しかし，テイラーの実験のような 3 カ月間もの長時間露出は電子線の実験では容易ではない．何しろミクロの世界の実験なので，装置が 3 カ月もの間，安定であるのは不可能に近く，露出時間中に干渉縞が横にずれてしまう．例えば，直径 50 Å という小さな電子源がその直径分だけ動いたり，0.3 μm の太さのバイプリズム・フィラメントが少し横にずれたりしてもいけない．

実験をしてみて，干渉縞を洗い流してしまう最大の要因は，電子線バイプリズムのフィラメントの安定性であることが分かった．数分間の露出時間を考慮して設計した電子線バイプリズムは，とてもテイラーの実験のように 3000 時間もの長時間安定ではいられない．フィラメントが横にずれて，露出中に干渉縞が 1 本分だけずれてしまうと，実験は意味のないものになってしまう．そこ

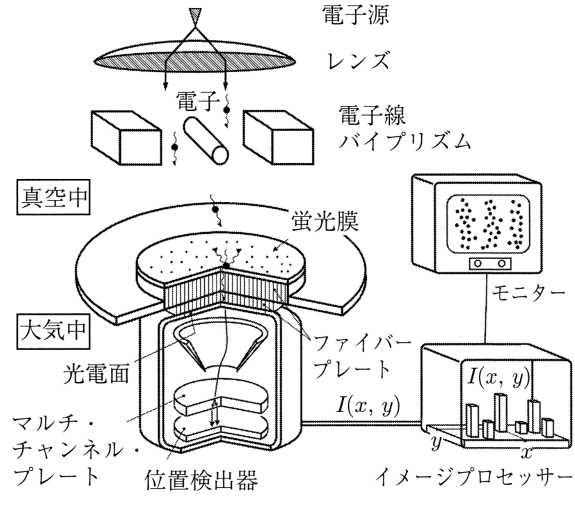


図 6.3 電子線バイプリズムを用いた干渉実験．

でバイプリズム干渉縞の動きが1時間で干渉縞間隔の10分の1しか動かないようにして実験を行った．

この実験で意味のある結果が出るかどうかは，予め，きちんと考えておかねばならない．5万ボルトで加速した電子の速度は，光速のおよそ2分の1．1.5 m ほどの装置の中は，10億分の2秒という，あっと言う間に通り過ぎてしまう．1/100秒の時間精度で電子の検出を行う実験なので，電子が電子源から発射したとたんに検出されると思って間違いない．したがって，電子がポッン・ポツンとやってくる条件下では，1個の電子が装置の中に存在する確率は極めて少ない．

もっと具体的に言うと，20分で干渉縞が見えるように設定すると，やってくる可干渉な電子の平均間隔は150 km もある．装置の中をほんの時たま，電子が通りすぎるだけである．まして，2個の電子が装置内部に同時に存在するなど，1時間待ってもチャンスはない．

電子の強度を極めて弱くするのは，思うほど簡単ではない．これは電界放出電子銃の得意技である．針に印加する電圧を減らすだけで，電子線の強度は指数関数的に急激に減少する．勿論，100 μA もの電流の熱電子線を“絞り”などで遮ることはできるが，電子顕微鏡の中に100 μA もの大電流を流していると1秒に 10^{14} 個ものたくさんの電子が流れることになる．これを10個のオーダーにまでするのは至難の技である．絞りの縁などで散乱された電子などが電子顕微鏡の中を徘徊して，非干渉なダーク電流[傍注6]の形で紛れ込んでしまう．これらは干渉縞を作らない．

［傍注6］ 情報をもっていないバックグラウンドの電流．

6.5 実験開始

それでは，電子1個1個を，間を置いて電子線バイプリズムに送ってみよう．針先から放射状に出た電子はバイプリズムの右か左かを通り，検出器に到着する．到着位置が検出されモニター上の輝点として表示される．輝点がポツンポツンと時間と共に積算されていく．図6.4の写真は，モニターの中心部分を見たものだが，これを見ると，まさに電子は粒子である．画面の中央に集中して到着しているようだが，ランダムな分布というのは，結構均一な分布からはずれている．

電子の数は次第に増えていくが，初めは電子の到着位置は，ランダムに見える（図6.5 (a)）．ところが，輝点がたくさんになってくると，やがて縦方向に縞らしきものが浮き上がってくる（図6.5 (b)）．電子は，装置の中を時折パッパッと通りすぎるだけなので，装置の中に電子が1個存在する確率は極めて小さい．にも関わらず，次第に縦縞が現れてくる（図6.5 (c)）．この干渉縞は，電子がバイプリズムの片方を通っただけでは生じない．電子が電子線バイプリズムの両側を同時に通って下で重なり合ったときに初めて生じる．あたかも，1個の電子が2つに分かれてプリズムの両側を通ったかのようである（このビデオは，次のサイトで見ることができる．http://www.hqrd.hitachi.co.jp/global/movie.cfm)．

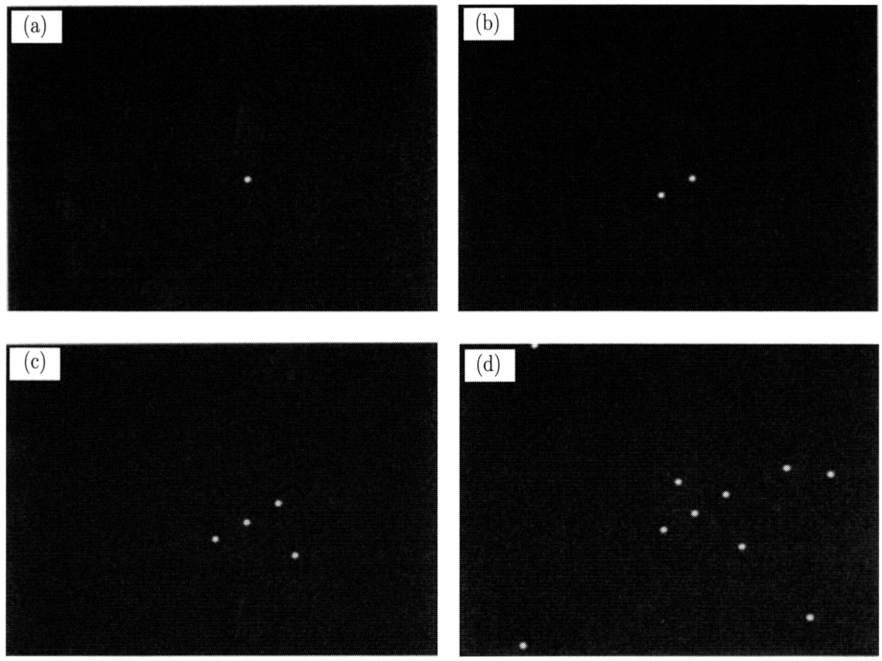


図 6.4　単一電子による干渉縞の形成. (a) 電子の数 = 1. (b) 電子の数 = 2. (c) 電子の数 = 4. (d) 電子の数 = 10.

このビデオは，見るたびに不思議に思うので，いつも講演で紹介している．だが，これは，私だけの思い過しではなかった．

6.6 15 年後の反響

この実験は，1989 年に学習院大学の江澤洋先生と一緒に論文を発表した[1)]．その後，1994 年の英国王立協会での金曜講話を初め，あちこちの学会でこのビデオを紹介しているうちに次第に反響が高まっていった．1999 年には，ノーベル物理学賞の選考委員長だった G. エクスポンの「ノーベル・アーカイブスに反映された光の二重性」という記事（http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/articles/ekspong/index.html）の中に引用された．2002 年には，『フィジックス・ワールド』というイギリスの物理の雑誌で，“史上最も美しい実験”の第 1 位に取り上げられ，急に注目を浴びるようになった．これは，R.P. クリース教授の「世界で最も美しい実験は何か？」という問いかけに応えた読者のうちの最大得票数を得たのが，何と，我々の実験であったのである．私が留学したメレンシュテット先生の弟子のイェンソンの実験（1965 年）と一緒に選ばれた．メレンシュテットを初め，1950 年代，60 年代のドイツの電子顕微鏡の人たちの実験は実に見事で 50 年経った今でも色褪せることはない．H. ベルシュ，H. レター，O. シェルツァー，E. ルスカなど錚々たる人たちがいた．

2 位，3 位にガリレオやミリカン，ニュートンといった歴史上の科学者が並んでいるのには，びっくりさせられた．「これに類した実験なら前にもやっている」

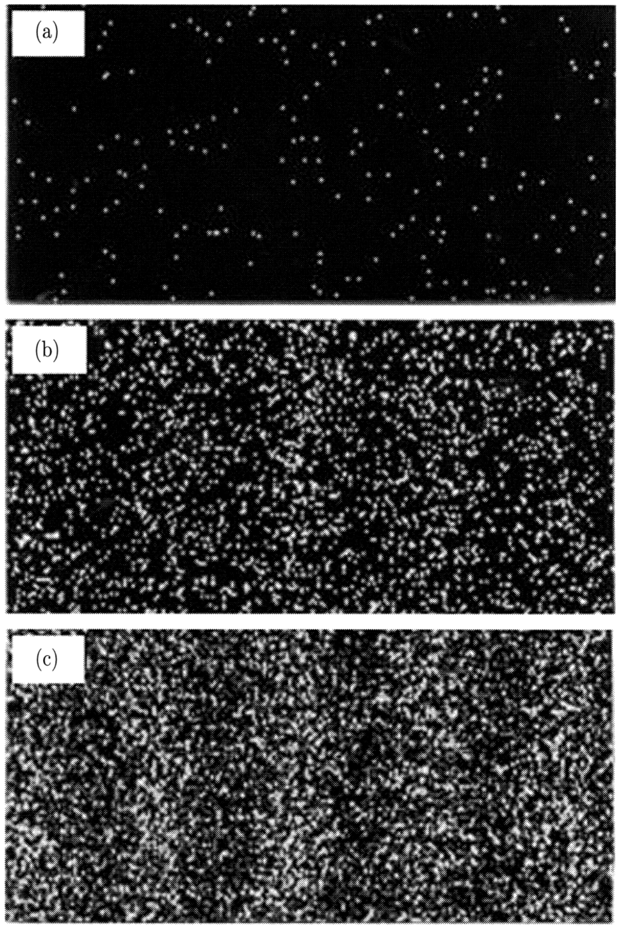


図 6.5　電子が積算されて干渉縞が形成される様子．(a) 電子の数 = 200．(b) 電子の数 = 6000．(c) 電子の数 = 40000．

という人たちも出てきたりして，関心をさらに高める結果になった．その後，クリース教授は『世界で最も美しい 10 の科学実験』という題の本を出版した（日経 BP 社，青木薫訳，2006 年，原著："The Prism and the Pendulum—The Ten Most Beautiful Experiments in Science—", Robert P. Crease, Random House, New York, 2003)．

この本の中に，ビデオを見たエディンバラ大学の天文学者のこんな言葉が紹介されている．

「途方もない衝撃でした．点の分布がまさしく干渉パターンになっていることが突然目に見えるようになったことです．そのパターンは私の目を釘付けにしました．二重スリット実験を見るという経験は，生まれて初めて皆既日食を見る経験に似ています．身体を感動が突き抜け，腕に鳥肌が立つのです．なんてことなの！ こんなことが現実に起こるなんて．そう思って，知識の基礎が大きくゆらぎました」．

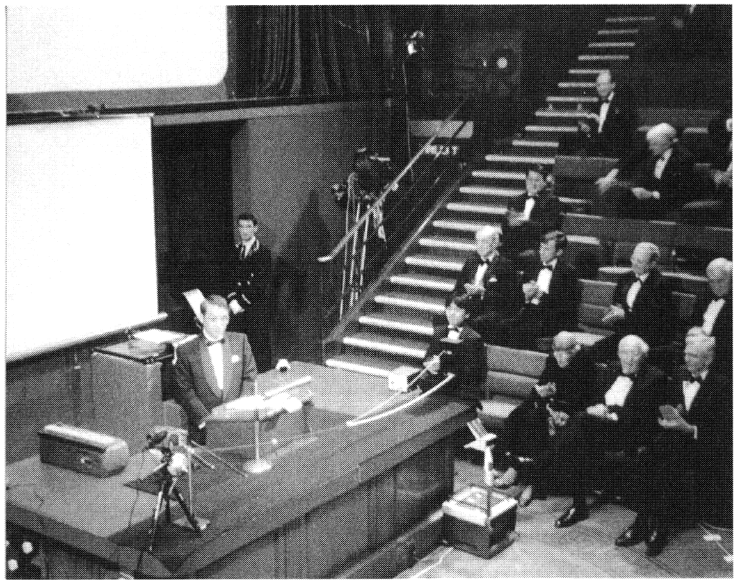


図 6.6　英国王立協会での金曜講話.

クリース教授自身，私の金曜講話（図 6.6）に参加して，このビデオを見ていたと言う．このとき，ケンブリッジ大学からは A. ハウイー，H. アーメッド，ボローニャ大学から G. ポッチなどの先生方が来ていたことは知っていたが，クリース教授が来ていたことは知らなかった．クリース教授は，このビデオについて，こんなことを言っている．

「王立研究所での講演で，外村はビデオを早回しし，一見するとランダムに見える“一つ一つの点”から干渉パターンが浮かび上がってくる様を示した．それは一度目にしたら決して忘れることのできない光景だ．あたかも夕暮れ時に，小さな星たちから，次第に銀河が浮かび上がってくるように，そのパターンは否定しようのない深くて普遍的な構造の存在をほのめかしていた」.

「この実験は，量子力学のどこが謎なのかを簡潔明瞭に示してくれる．量子力学に関わる他のすべての謎，有名なシュレディンガーの猫や，ベルの不等式など，非局所性にからむ“もろもろの実験”が示す謎は，すべて，この量子干渉の謎から発しているのである」.

6.7 ファインマンの経路積分

二重スリットの実験は，1 個の電子が 1 本の軌道を辿って検出器に到着するのではないことを，まざまざと示してくれた．それならもっとたくさんのスリットを作ったらどうなるか？ イェンソンは 5 つのスリットを作って干渉縞を得た．さらに増やして，数え切れないほどのスリットにしても，事情は同じである．1 個の電子は，無数の分身となってすべてのスリットを通る．そして，検

出面で，1個の電子が検出される．こうなると，スリットを無限にする，つまりスリットを置かなくても，事情は同じように思える．1個の電子は，1点を発し1点にたどりつくまで，スリット面上（何にも存在しない面）のあらゆる点を通ってきたことになる．

1948年ファインマンは，量子力学の新しい定式化を行った．1点から別の1点に至る電子は，ありとあらゆる軌道を通る．だが，それらの軌道に沿っての波動関数を加えてみると，ちょっと軌道がずれただけで波動関数の位相が急激に変化するため，ほとんどの軌道では打ち消し合ってしまう．位相の値が変化しない軌道だけが残る．

面白い考え方で，電子を考えるのに打ってつけである．

6.8 おわりに

量子現象は，かつてデバイスのトレンドに究極の限界を与える邪魔者と考えられてきた．しかし，最近では，量子力学の最も不思議な原理が，実用に供されようとしている．

量子の世界では，1個の電子（量子）がプリズムの両側を通り2つの状態を取ることができる．もっとたくさんの状態を作って各状態で並列に演算を行わせると，驚異的なスピードの“量子コンピューター”が実現する．また，電子の波を途中で傍受すると，観測によって波の状態は破壊されてしまうので，“決して破ることのできない暗号システム”や，盗聴されるとそれと分かる“量子通信”が実現可能になる．

かつて，単に理論上の不可解な仮説と思われてきた量子力学の原理が，現実の世界に姿を現すことは，考えてみれば当然のことかもしれない．量子力学は，今や物理のみならず化学や生物に及ぶあらゆる自然科学を支配する勢いである．基礎は必ず重要であり，単なる理論上の原理に止まるはずはない．いずれ，物理のみならず生物に至る領域で，不思議な量子現象が顔を出すことになると思う．

近年急速に関心の集まりつつある量子現象を解明すべく，様々な手法が開発されているが，電荷を持っている電子は，電磁場と直接反応するため，電磁場を通して量子現象を観察する手段としてうってつけである．

参考文献

1) A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa: *Amer. J. Phys.* **57** No.2 (1989) 117–120.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

視覚の科学と数学

ウェーブレットで探る錯視の世界

第4回

錯視発生のシミュレーション/新しいウェーブレット・フレームの開発

新 井 仁 之

4.1 錯視発生のメカニズムの解析（前回の続き）

前回は我々が考案した視覚の非線形数理モデルの概要と，それを用いて行った錯視発生の計算機シミュレーション，ならびにそれに基づいた分析を述べた．錯視としては，ヘルマン格子錯視（第2回, 図 2.8）とそのバリエーション（第3回, 図 3.9, 図 3.10），シェブルール錯視（第 3 回，図 3.11），視覚の非線形性を表す錯視（第 3 回，図 3.13），そして視覚の大域的非線形性を示すために作成した錯視（第 3 回，図 3.2）を取り上げた．今回はそれ以外の錯視の話から始め，錯視のもつ意義について論ずる．後半からは少し話題を変えて，視覚の数理モデルに適した新しいウェーブレット・フレーム，フレームレットについて述べる．

4.1.1 明暗の対比錯視

図 4.1 をご覧いただきたい．同じ輝度の正方形が並んでいる．しかしこれを濃い輝度の背景と薄い輝度の背景で囲んでみる．それが図 4.2 であるが，この図では左側の正方形の輝度が上がり，右側の輝度が下がって見える．これは明暗の対比錯視と呼ばれるもので，非常に古くから研究対象となっている．例えばドイツの文豪ゲーテは『色彩論』の第 1 部第 3 章「灰色の面と像」で明暗の対比錯視について論じている．彼はこの錯視について「網膜のすぐれた活動性がよく認められる」（ゲーテ『色彩論』第 1 巻（高橋義人，前田富士男訳，工作舎）p.49）と述べ，網膜にその原因を求めているが，錯視が現れるメカニズムに関する科学的な議論は行っていない．明暗の対比錯視発生のメカニズムに対する本格的な科学的説明がされるようになったのは 20 世紀半ば以降であろう．例えば網膜の明るさに対する拮抗型受容野による情報処理の結果として説明されることもある．しかしこれにはいくつかの反論もある．

本稿では，我々の考案した非線形数理モデルによる計算が明暗の対比錯視を発生させることを示しておきたい．シミュレーション結果は図 4.3 のよ



図 4.1　同じ輝度の正方形．

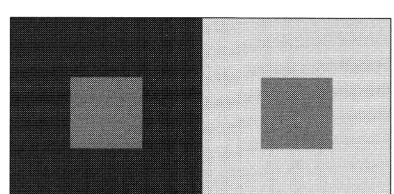


図 4.2　明暗の対比錯視．

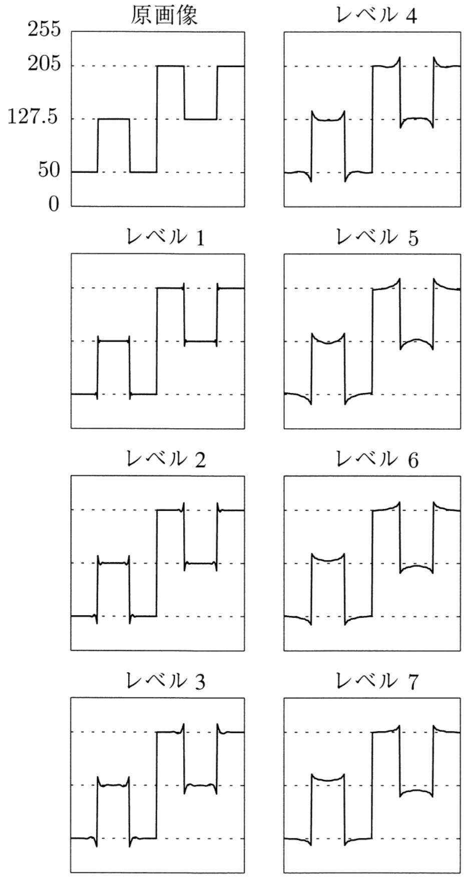


図 4.3　明暗の対比錯視発生の計算機シミュレーション．図の中心を通る水平線に沿った輝度のグラフ．

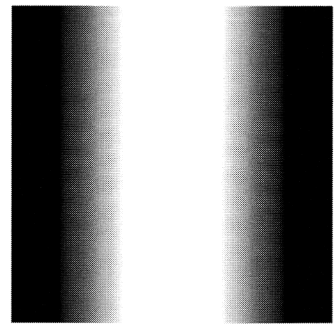


図 4.4　マッハの帯．

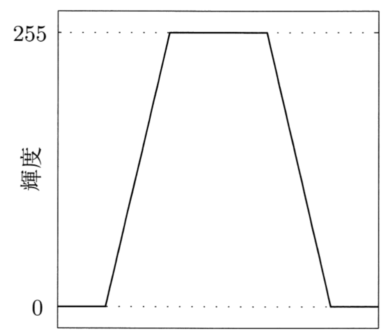


図 4.5　マッハの帯の輝度のグラフ．

うなものである*1)．我々のこの計算機シミュレーションは，明暗の対比錯視の発生に前回述べた大脳皮質の V1 野での非線形情報処理が大きく寄与していることを数学的に示している．ただし筆者らは，明暗の対比錯視にはさらに高次の視覚野の寄与もあるのではないかと考えている．このことに関する数学的な方法による検討は今後の課題の一つである．

4.1.2 マッハの帯

マッハの帯はオーストリアの物理学者であり哲学者のエルンスト・マッハにより発見された錯視である（1865）．図 4.4 にあるような図形がいわゆるマッハの帯である．この図を見ると，ちょうどグレーのグラデーションが白になる境界のところが一段と白く光っているかのように見える．しかし図 4.4 の輝度のグラフを見ると図 4.5 のように単なる台形状のものとなっていて，グレーが白になる境目のところは，特に白くなっているわけではない．また黒とグレーのグラデーションの境目の部分がより黒く見えるがこれも実際の輝度のグラフとは異なった知覚となる．

マッハのこの錯視に関する知見はマッハ著『感覚の分析』（原著 1918 年，須藤吾之助，廣松渉訳，法政大学出版局，pp.177–178）でも読むことができる．この本に従って彼の説を簡単に紹介しておこう．まずマッハの帯の描き方であるが，現在ではパソコンを使って容易にグレーのグラデーションを描くことができる．しかし今から約 100 年以上前のことである．マッハは前掲書の第 27 図の黒と白からなるあるデザインをシリンダーに巻きつけ，それを回転させることによりグレーのグラデーションを実現し，マッハの帯のようなものをシリンダー表面に出現させた．彼は「網膜は些細

*1)　このシミュレーションでは図 4.2 の右半分と左半分を別々に計算した．

な差異を抹消し，かなり大きな差異は不釣合いに顕揚する．網膜は図式化し略画化する」（前掲書, p.177 より）と述べ，明るさの一様な連続的変化に我々がほとんど気がつかないことから，図形の 1 次微分よりは 2 次微分を明暗の知覚に反映させるような一種の数学的モデルを提起している．ただし図 4.5 では問題の錯視が現れる箇所は微分不可能になっている．一般に微分不可能な部分がある図形に対して，マッハ自身も 2 次微分を使った自らの公式が適用できないことを指摘している．しかし彼は網膜では明暗の変化はぼんやりと拡がっているとしている．そして「けだし，網膜は感受性をもった点から成っているのではなく，有限個の・一定の拡がりをもった・可感的要素から成っているのである」（前掲書, p.178）と記している．

現在の画像工学，そして網膜の神経節細胞が受容野を形成していることを知っていると，マッハのこの錯視に関する言明には何か意味深長なものを感ずることを禁じ得ない．しかしネコの網膜の神経節細胞の拮抗型受容野がクフラーにより発見されたのは 1953 年のことである．受容野の発見以降は，マッハの帯に対して同心円形の拮抗型受容野の側抑制による説明がなされるようになり，ニューラルネットワークによるシミュレーションなども行われた．しかし，さらにマッハの帯に関するいろいろな議論が行われている[*2]．

我々の非線形数理モデルでもマッハの帯の錯視発生をシミュレーションできる．図 4.6 がそのシミュレーション結果で，レベル 8 の非線形多重解像度画像の輝度のグラフを載せてある．このシミュレーションはマッハの帯の錯視発生に，第 3 回 3.1 節に記した V1 野での非線形情報処理が寄与していることを示している．

4.1.3 トドロヴィック錯視

ところで，すべての錯視が今回の非線形数理モデルでシミュレーションできるというわけではない．またある程度はシミュレーションできるが，完全とは言えないような錯視図形もある．シミュレー

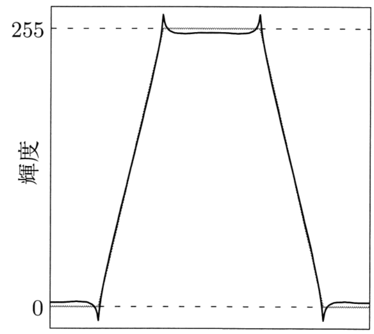


図 4.6 マッハの帯の錯視発生のシミュレーション．レベル 8 の非線形多重解像度画像の輝度のグラフ．

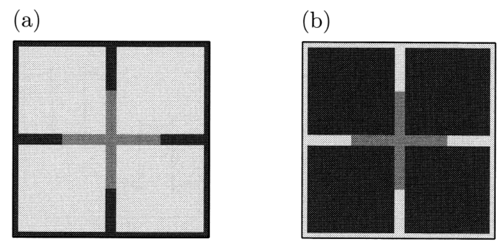


図 4.7 トドロヴィック錯視.

ションできない錯視は，まだ数理モデル化して組み込んでいない処理によるものが関与していると考えられる．その一例を示しておこう．図 4.7 (a) には細く濃いグレーの十字の路があり，その中央の部分がそれより薄いグレーになっている．一方 (b) ではグレーの薄いグレーの十字路の中央の部分がそれより濃いグレーになっている．さて中央の部分を比較すると, (b) のほうが (a) のほうよりも濃く見える．しかし，十字路の中央の部分の輝度は (a) も (b) も実際は全く同じに描画してある．この錯視（トドロヴィック，1997）は明暗の錯視としては非常に興味深いものとして知られている．なぜならば，もしこれを側抑制により明暗の対比と同じように説明しようとすると，(a) の中央の十字のほうが (b) のそれよりも濃く見えなければならないからである．そこで，この錯視が我々の非線形数理モデルでシミュレーションできるかどうかを見てみよう．結果は図 4.8 である．(b) の中央のほうが (a) のそれよりも濃くなっていることはシミュレーションできている．しかし実際の知覚に比べてそれほど大きな差ではない．このことは，トドロヴィック錯視は前回述べた V1 野の

*2) 例えば L. Pessoa, *Vision Res.* **36** (1996), 3205–3227 参照.

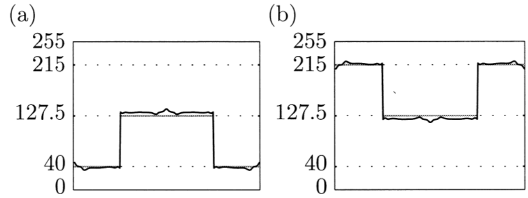


図 4.8　トドロヴィック錯視の出力（レベル 8 の非線形多重解像度画像）の中心を通る水平線に沿った輝度のグラフ．薄いグレーの線は原画像の輝度のグラフである．

非線形処理である程度出現することを示している．そして，おそらく V1 野のその処理を契機として，より高次の視覚情報処理がこの錯視発生に寄与しているものと推測できることも示している．

この錯視が高次視覚情報処理に関係していることは，例えば次のことからもわかる．講演などの機会に聴衆に聞くと，ほとんどの人が図 4.7 の (a) あるいは (b) の中央に円板があって，その上に 4 枚の正方形が載っていると答える．このように感じることは，高次の視覚と認識に関する問題である．ところで中央にある十字の境界は水平な線分と垂直な線分からなり，円を示すような曲率を示す線は含まれていない．それにも関わらず，4 枚の正方形の後ろに円板があるように見えるのはなぜだろうか．こういった問題に対する数学的な研究も非常に興味深いものである．

この他に今回の数理モデルでシミュレーションできない例としては，例えばカニッツァの三角形という錯視がある．実はこれには V2 野の主観的輪郭に反応する細胞が関連していることが知られている．このようにシミュレーションできない錯視があるということは，それが数理モデルに組み込んでいない処理に関連しているということを明確にするという点で非常に重要である．そしてそういった錯視を数学的に解明することは，高次の視覚情報処理の数学的研究のための次のステップになっている．

4.2 錯視は視覚の欠陥か？

本節では人為的な錯視図形ではなく，自然な画像に対して我々の非線形数理モデルがどのような処理を行うのかを示しておきたい．図 4.9 が入力画像である．これを我々の非線形数理モデルで処理した結果（レベル 8 の多重解像度画像）が図 4.10 である[*3]．両者を比べると，花びらにある筋の部分が鮮明になっている．また花の右斜め上にある茎も鮮明になっていることも確認できるであろう．全体的に，より鮮鋭化したほうが見やすい部分は鮮鋭化されているが，画像全体には不自然な影響は出ていないことがわかる．このことを詳しく見るために，例として図 4.10 の矢印の部分の水平線に沿った輝度のグラフ（図 4.11 の濃いほうの線）と，原画像の同じ部分（図 4.11 の薄い線）とを比較してみよう．両者を比較してみると，花びらの



図 4.9　原画像．256×256 画素，256 階調．

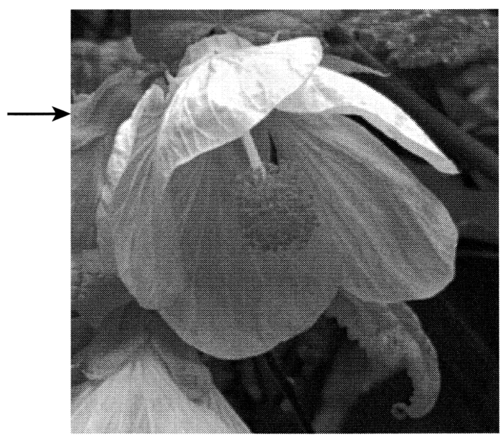


図 4.10　出力画像．

*3)　境界での不連続性による影響を避けるため，512×512 画素に対称拡張して，それを $\boldsymbol{Z}/512\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/512\boldsymbol{Z}$ の画像として処理し，もとの位置の 256×256 画素分を切り抜いた．

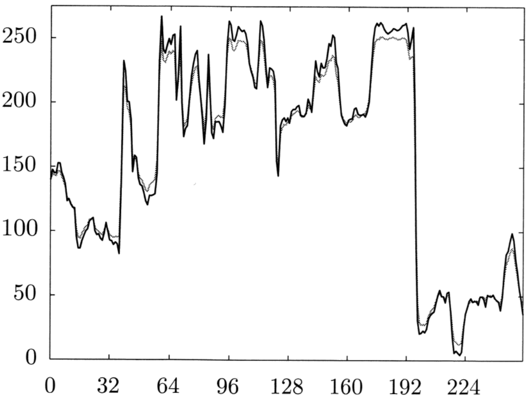


図 4.11 濃い線：出力画像の矢印のところの水平線における輝度のグラフ．薄い線：同じ部分の原画像の輝度のグラフ

筋の細かい部分やエッジが強調されていることがわかる．またそれだけでなく，エッジ強調による画像の不自然さを回避するような処理もなされている．例えば図 4.11 の横軸 160 から 192 の辺りの部分を見ると，エッジが強調されているだけでなく，エッジに囲まれた部分の輝度が上がり，全体的に不自然さがなくなるようになっている．また茎の部分（横軸 192 から 224 辺り）も背景との対比が際立つように処理されている．他の自然な画像を入力しても同じような傾向の処理がなされる（新井[1,2]参照）．このことは，これまで考えてきた情報処理が実は視覚系に備わった「ものをよく見ようとする」ためのものであることを数学的に示している．また次のようなことも言える．錯視は視覚系の欠陥から生じたものであるという意見がある．しかし我々の非線形数理モデルによるシミュレーション結果から，例えば前回と今回取り上げたような錯視は，視覚系の欠陥というよりは，むしろものをよく見ようとするために形成された視覚系の優れた機能の副産物であることを数学的に示している．

4.3 新しいウェーブレット・フレームの開発

ここで少し話題を変えて，視覚の数理モデルにとって，より適した新しいウェーブレット・フレームの開発について述べておく．これまで我々は，

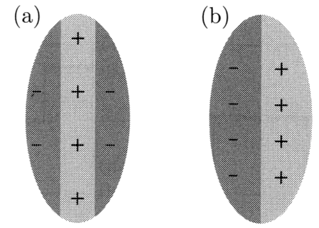


図 4.12 (a)：偶型，(b)：奇型．

Cohen らが錯視の研究とは関係なく考案した双直交ウェーブレットと，やはり視覚の研究とは別の目的で導入された定常法を組み合わせて，ベースとなるフィルタ・バンクを作った．そしてこれに非線形処理を付加した．しかし視覚の神経科学的な観点からすると，双直交ウェーブレットにはいくつかの改良すべき点がある．その一つは，単純細胞のタイプが，我々が用いた双直交ウェーブレットでは第 2 回の図 2.1 で示したようにいわゆる偶型であったことである．しかし実際は，Hubel と Wiesel の実験によると奇型（図 4.12 (b)）のものもある．

もう一つの改良すべき点は方位選択性である．単純細胞では様々な方位選択性が認められているが，双直交ウェーブレットでは方位選択性は水平，垂直，対角の三方向しかない（図 4.13 参照）．これは 1 次元ウェーブレットのテンソル積で作った 2 次元ウェーブレットの一つの欠点でもある．画像処理ではテンソル積による 2 次元ウェーブレットはよく使われている．その理由は主要な三方向がカバーできていて，しかもテンソル積であるために計算が軽いという大きなメリットがあるからである．しかし視覚情報処理の点からは，計算は少し重くとも，もっと多くの方位選択性があるほうが望ましい．

さらに最近 R. Young は神経科学的な観点から，単純細胞の機能は Gabor 関数や DOG 関数よりも，低階から高階までのガウス導関数（ガウス関数の導関数）を用いたほうがよりよくフィットできることを指摘した[3]．図 4.14 は 0 階から 6 階までのガウス導関数のグラフである．この観点からすると，偶型，奇型というだけでなく，さらに細か

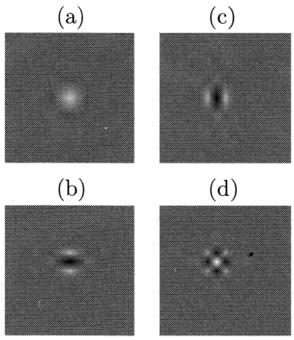


図 4.13　レベル 4 を処理する定常双直交ウェーブレット．(a) はスケーリング・フィルタ．ウェーブレット・フィルタから作られるものには，水平 (b)，垂直 (c)，対角 (d) がある．

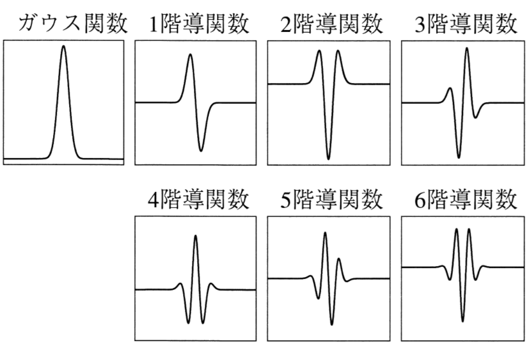


図 4.14　ガウス導関数のグラフ．

いタイプのフィルタを用意する必要がある．さらにこれらを FIR フィルタ，あるいはコンパクト台をもつ関数により作成したい．その一つの理由は，受容野の大きさが実際には有界であることによる．言うまでもないが，Gabor 関数，DOG 関数，ガウス関数はいずれも台が無限に拡がっている．したがって画像のような有限な領域での解析をするためには，無限遠に広がらないように有限のところでカットしなければならない．これにより完全再構成性も計算機上は近似的なものになる．完全再構成という点，計算量という点からも IIR フィルタを近似的に有限長にカットするよりも FIR フィルタあるいはコンパクト台をもつウェーブレット・フレームのほうが望ましい．

ところで完全再構成性がなぜ必要なのだろうか？視覚は錯視を生み出すわけであるから，完全再構成にはなっていない．我々の数理モデルでも，基礎になるフィルタバンクは完全再構成であるが，それに非線形処理を加えることにより完全再構成性がなくなっている．実際，これまで示してきたように錯視のシミュレーションが行えた．完全再構成性が必要である理由は，実は非線形情報処理によりどのように不完全になるかを特定するために必要なのである．なぜならば，もし基礎になるフィルタバンクが不完全であると，非線形処理の数理モデル化をしたときに，錯視（より一般的に出力と入力との差）が非線形処理によるものか，それともフィルタバンクの不完全性に起因するものかを特定できなくなってしまうからである．

次回はここで述べたような要請をみたすような，我々が考案したウェーブレット・フレームについて述べる．

参考文献

1) H. Arai, *Interdisciplinary Information Sci.* **11** (2005), 177–190.
2) 新井仁之，ウェーブレットと視覚—明暗の錯視をめぐって—，「数学のたのしみ 2004 秋」（日本評論社），78–99.
3) R.A. Young, *SPIE* **1453** (1991), 92–123.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/科学技術振興機構さきがけ）



Knock the door

永長　直人

1. はじめに

編集部からこのリレー企画の原稿依頼をいただいたときに，自分はまだ人に経験談ができるような段階ではないと少し躊躇したのですが，今から物理や数学に進もうと考えている学生諸君に参考になるかも知れないという期待と，昨今の若い研究者を取り囲む環境が一段と厳しくなっている現実を見るにつけ，何かの形で元気づける話ができればという気持ちでお引受けしました．今までの研究生活を振り返って，少しでも若い諸君の栄養になりそうなことを以下に綴ります．まとまりのないものになってしまいましたが，何かの参考になれば幸いです．

2. 顕微鏡とアポロの思い出

自分が何時から科学を志したかと聞かれると，小学生時代の顕微鏡のことがすぐに思い浮かびます．小遣いを4年ほどため続けて当時6000円のオリンパスの倍率300倍の顕微鏡を購入しました．これが私の唯一の宝物で，スライドグラスの上で展開される“極微の世界”に時が経つのも忘れて見とれていました．当時は私の家の周りには山や田畑が広がっていて，そこから取ってきた植物の細胞とかミジンコとか，身近なものなのですが，目で見えない世界が広がっているということに大きな衝撃を受けまた深い神秘を感じました．1969年に打ち上げられたアポロの月面着陸も大きな出来事でした．月から送られてくる映像と，自分が見上げている月とがなかなか重なり合わなくて，妙な気持ちがしましたが，同時に科学というものが持つ絶大な力に圧倒される思いでした．エンジンを止めても「慣性」によって飛び続けるとか，無重力状態とか，私にとっては「不思議な話」がニュースで毎日のように報道されて，科学への関心が非常に高まっていた時期でした．1970年の大阪万国博覧会にはアメリカ館に月の石が展示されており，長い行列を3時間以上も並んで見に行ったことも思い出します．それから，中学に入って算数ではなく数学というものに接してその美しさに魅入られたのも物理や数学の分野に進む動機になっているのは間違いありません．数式の持つ美しさ，しかもそれが自然を記述していることにやはり神秘的なものを感じていました．これらが科学へ興味を持つきっかけだったと思います．

3. 短所は忘れて長所を伸ばす

私が物性理論という分野を選ぶまでにはいろいろな紆余曲折がありました．高校時代は数学が3度のご飯より好きで，東大の理科I類に入学した

ときには当然数学科に進むつもりでいました．実際，当時の雰囲気は最もできる学生が数学科に進学するという感じだったのです．ご存じのように，東大では最初の2年間は駒場で教養課程を修了し，その後（実際は1年の夏休み明けごろに）学部・学科を決めるという進学振り分け制度が行われています．その駒場での2年間，自分の適性というものを試してみるチャンスがあったわけです．まず，大きな期待を持っていた数学ですが，すぐに自分には無理だとわかりました．解析は良かったのですが，線形代数の講義が，いきなり体とか環とか抽象的なものばかり出てきて，公理・定理・補題…の連続に頭が痛くなってしまったからです．その反動か，今度はドイツ文学や哲学に惹かれて文学部へ進もうかと考えたり，そうかと思うと今度は化学こそは現実の世界に最も肉迫できる学問だと考えていろいろ勉強したりしていました．ちょうどそのとき，化学の授業で「試薬分析」の課題がありました．いろいろな試薬を使った反応を見て，試験管の中の未知の物質Xを決定せよ，という課題で，私はその日が来る前から十分な準備をして，「完璧な」場合分けの系統図を作り，どのような物質Xに対しても必ず決定できる方法を持って臨んだわけです．ところが当日になると，匂いを嗅いだりして大体の「あたり」を勘でつけて，2, 3個の試薬を試して「わかった．これはXXだ」と正解を出してしまった友人が近くにいたのです．結局最後の一人になってようやく分析を終えた私に，担当の助手の先生が「君は理論に進んだほうがいいと思うね」とおっしゃったときに，人にはそれぞれの天分というものがあると実感しました．抽象性と具象性の1次元座標を作ったときに学問分野に応じた抽象度というものがあって，数学を左端だとすると，素粒子理論，物性理論，物性実験，素粒子実験，化学，生物，医学というように並んでいてそれぞれの人に最適のところがあるのだと思います．今，振り返ると駒場の時代は自分の居るべき位置を試行錯誤で探していたのでしょう．最近超伝導研究で著名な秋光純先生がある講演で，「短所を直そうとしてはだめだ，短所は忘れて長所を伸ばせ」とおっしゃっていましたが正にそのとおりだと「我が意を得た」のもこのような経験があったからです．

4. 手探りで進む

物性理論をやろうと決心をしたので，理学部の物理学科に進学しようと思っていたころ，下宿の上の階に住んでいた理学部の素粒子理論の大学院生の人が，「物性をやるんだったら工学部に物理工学科というところがある．そちらのほうが教官も親切に面倒を見てくれるんじゃないかな．」とアドバイスしてくれました．私は父が工学部の機械学科の水力を出てポンプの設計エンジニアとして働いていて，計算尺で「ちゃんばら」をしながら育ったこともあり，工学部というものに親近感を持っていましたから，なるほど，と思いそちらのほうも調べてみました．すると，小さいけれどもとても仲が良さそうな雰囲気だったので，そこに進学を決めました．

確かに物理工学科では，教官が皆教育熱心で演習なども熱がこもっていました．計算が好きな私は，一番早く問題を解くことに情熱を傾けて，教官にもっと難しい問題を出してくれと頼んだりしていましたが，これも今考えると生意気盛りの自分に冷や汗をかいています．論文講読というのもあって，ランダウの反磁性の論文をドイツ語で読んだことや，夏休みに友だちと集まってクーラン・ヒルベルトの物理数学の教科書を読んだりしたことも懐かしい思い出です．

卒業論文研究では田中昭二先生の研究室で当時助手をされていた谷俊朗先生の指導の下，遷移金属ダイカルコゲナイドの輸送特性の実験的研究を行いました．（物理工学科では必ず実験の研究室で卒論を行うことになっています．）層状構造を持ち電子状態が2次元的な遷移金属の化合物というのは今考えるとまさに銅酸化物高温超伝導体の前触れだったわけですが，そんなことを当時の私が理解できるわけもなく，毎日熱電対の目盛を睨んで温度調整をしながら1T-TaS2という物質の電気抵抗，磁気抵抗，ホール効果の温度変化を夜遅くまで（あるいは朝まで）測っていました．このときに最初読んだ電荷密度波に関する論文がLee–

Rice–Anderson の3人によるものでしたが，4年生には手に負えないものでした．さて実験をすると，この電荷密度波転移よりも低温側でどんどん電気抵抗が大きくなっていきます．この現象が当時盛んに議論されていたアンダーソン局在のスケーリング理論にフィットできるというのが私の結論でしたが，そのころにゼーマン効果を取り入れて 1T-TaS2 の磁気抵抗を解析した福山・芳田理論というものが提出され，福山秀敏先生が芳田圭先生と一緒に物理工学科に議論に来られました．そのとき，4年生の私が両先生の前でいきなり話をさせられ，実験データを紹介しながら，温度に対数的に依存する電気抵抗の係数が普遍的な値より小さい原因に関する自分の「理論」を説明しました．すると芳田先生に「実験結果だけを説明すれば良いので，余計な解釈は要らない」と怒られたことも今となっては懐かしい思い出です．

5.「勉強」をし過ぎないこと

さて大学院では物性理論の花村栄一先生の研究室に進みました．花村先生は，光物性を中心として広い分野で活躍されておられますが，進学早々「もう勉強は十分だからすぐにテーマに取り掛かりましょう」と言われ，面喰ってしまいました．いきなり研究をする自信がなかったのです．卒業論文研究の経験はあったものの，装置やテーマのお膳立てをすべてしてもらった上での話で，理論となると自分で一から組み立てなければなりません．しかもそのときの話では，8月に仙台で低次元電子系に関する山田コンファレンスという会議があるので，そこで発表するようにということで，4カ月というタイムリミットまでついていたのです．そのときに出されたテーマというのが，遷移金属ダイカルコゲナイドのラマン散乱と赤外吸収の理論というものでした．「ラマン散乱」など全く聞いたこともなく，渡された実験データ（このデータは同時大阪大学に居られた水貝俊二先生と，東大の内田慎一先生のものでした）も複雑怪奇で Ag だの Eg だの見慣れない記号が横に書いてあってさっぱりわかりません．これは困ったと頭を抱えましたが，どうしようもないのでまず4年生のときにわからなかった Lee–Rice–Anderson をとにかく理解できるようになろうと決心し，グリーン関数を必死で勉強して何度も読んでいるうちに，おぼろげながらだんだんと何をやっているかわかるようになって来ました．この論文を皮切りに点群から始めてラマン散乱，GL（Ginzburg–Landau）理論，などを次々に勉強していきました．そうなるとあれも勉強したい，これも勉強したいと虫が騒ぎ出して「研究」をほっぽり出して教科書ばかり読んでいました．複雑怪奇なデータを眺めているよりも，理路整然と体系づけられた教科書を読んでいたほうが楽なのは当り前です．でも勉強ばかりしていては仕事になりません．それで計算機に向かっていろいろ計算を進めましたが，望みのラマン散乱強度を得ようとすると格子の不安定性が起こったりしてうまくいきません．会議は近づくのに出口が見えないし，15分の英語の講演を一体どうすれば良いのか途方に暮れていました．

6. 案ずるより産むが易し

それでも8月になって，とにかく不満足ながらも何とか計算をまとめ，2つの機構でラマン強度と赤外吸収強度が説明できるという話を持って仙台に向かいました．発表のときの座長は大阪大学の望月和子先生で，いきなり修士1年の学生が国際会議のセッションに現れるというのは無茶と言えば無茶な話ですから，ずいぶん心配していただきました．ところが，しゃべり始めるとそれまで何回も練習していたこともあり自分でも驚くほどスムーズに喋れて得意になっていると，今度は質疑応答の段になってたちまち馬脚を現してしまいました．もう思考能力が停止していて “I do not know.” と答えるのがせいぜいでした．こんな風で発表は散々だったのですが，セッションの外ではいろいろ成果がありました．特にラマン散乱の権威である Miles Klein 先生に議論してもらうことができました．エクスカーションでも御一緒できて会議が終わる頃にはすっかり仲良くなり，御機嫌で会議から帰ってきました．

その後，会議でお世話になった望月先生の研究室に“内地留学”したり，いろいろ試行錯誤を繰り返して，1 年後にはどうやらラマン散乱と赤外吸収の過程は 3 つのプロセスで統一的に理解できることがわかってきました．それでようやく論文が書けるというので喜んでいると，ある日 Klein 先生から分厚いプレプリントが航空便で届き，先にやられたかと青くなったことがあります．自分の研究テーマと同じような研究をしている人は，友人であってもライバルですから，平静ではいられないものです．しかし一方では，1 年経っても私が電荷密度波の光スペクトルの研究をしていることを覚えていてくれて，プレプリントを送って下さったことが嬉しい気持ちもあって，複雑な心境でした．論文を読んでみると，Klein 先生の理論は層の間の結合が重要だという結論で，胸をなでおろしました．層間結合は弱すぎてとても実験を説明できないことを確認していたからです．というわけで，こちらからも約束通りプレプリントをお送りし，それが私にとっては記念すべき最初の論文になりました．

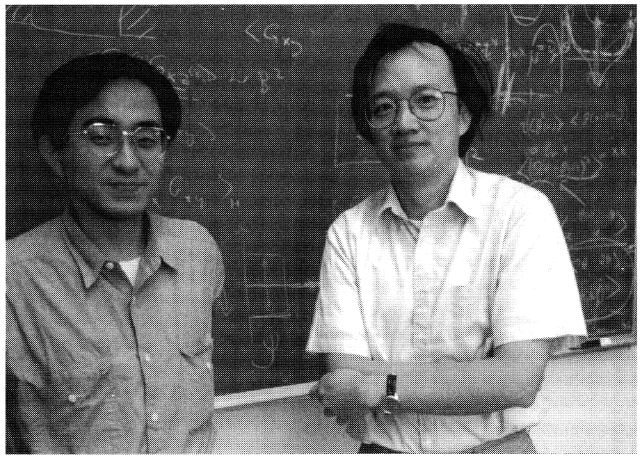
7. 論文にならなかった計算

その後，博士課程に進んで，もう自分でテーマを探そうというので，電荷密度波の非線形伝導，デピンニングの問題に取り組みました．固体化した電子が集団として動くわけですから，非常に面白いと思いました．川崎恭二先生のモード結合理論や動的繰り込み群などを非平衡状態へ拡張しようとして，いろいろ工夫したのですが，どんどん時間だけ過ぎて，約 1 年間何の成果もありませんでした．膨大な計算が机の引き出しにたまって日の目を見ないことになったわけです．

そうこうしているうちに，博士課程 1 年の秋も深まったときだったと思いますが花村先生から呼ばれて教授室に行くと，物性研究所で豊沢豊先生が助手の公募をされるが，応募してみないか，というお話でした．これは今のこの閉塞状況を打開するにはチャンスだと思って早速応募し，生まれて最初の「就職試験」を受けることになりました．部屋に入ると，豊沢先生の他，守谷亨先生，斯波弘行先生，など錚々たる面々で大変緊張しました．特に，守谷先生が金属系のラマン散乱のお仕事をされていたことを知らずにいて質疑応答で四苦八苦し，本郷に帰ってから花村先生には「君は守谷理論も知らなかったの？」とあきれ顔をされて，これはもう落ちたなと諦めていました．それで，数日後採用の通知をいただいたときは信じられない気持ちでした．(後で聞いたところによると，年齢がとても若かったのが幸いしたようです．でも運も実力のうちです．)

というわけで博士課程 1 年の 2 月に物性研の助手に着任しました．当時豊沢研究室には，平本尚さん，滝本淳一君と 2 人とも非常に優秀な大学院生が居られて，自分だけ月給をもらっているのは申し訳ないような気持ちでした．豊沢先生は，励起子やポーラロンに関する幾つかの問題を示唆して下さり，それで，ポーラロン問題を勉強し始めたのですが，論文を読んでいるとできることはすでに全部やられてしまっているように思われました．それでポーラロン問題に嫌気がさして，近藤効果や 1 次元電子系，などに関するセミナーを平本さん，滝本君と一緒にしたり，Bogoliubov–Shirkov の場の量子論の本を読んだり，と勉強三昧の日々を送っていました．田中昭二先生に，「それじゃ月給泥棒だな」と笑われたのもその頃です．確かに勉強ばかりして，何も生産していないわけですから，月給をもらっていては申し訳ないのですが，今振り返ると当時学んだことが全部今の研究の基礎になっているのですから，無駄ではなかったと思うし，それを許してくれた物性研や豊沢先生に今も感謝しています．このような「余裕」を持つことが個人にとっても組織にとっても重要なのではないでしょうか．この時期勉強したことは結局何の論文にもならず，計算はすべてお蔵入りでしたが，それでも私にとっては貴重な時間だったと思うのです．仕事にならなかったいろいろなアイデアや解けなかった問題は，その後もずっと心の中に残って今の研究の礎になっているのですから．

8. 実験家との遭遇



1990年 Massachusetts工科大学の研究室で Patrick A. Lee教授（右）と.

さて，こんな感じでぐずぐずしていたときに，“十倉さん”（当時は物理工学科の講師をしておられて，私の物理工学科の先輩なのでそのときは“十倉さん”と呼んでいました．十倉好紀先生のことです．念のため.）が物性研にわざわざ訪ねて来られて，中性・イオン性転移という面白い現象があるんだが，その理論をやってみないか，という話を持ってきて下さいました．そのときに感心したのは，話を聞いていると現象に対するイメージが生き生きと伝わってくることでした．これはそれまで数式だけでものを考えていた私にとってはとても新鮮なことでした．それで早速当時新しい手法として発展しつつあった量子モンテカルロ法を用いて中性・イオン性転移を調べる仕事を始め，結局それが私の博士論文のテーマになりました．それ以来，私は実験家の直観というものを非常に大切に思っています．物質を日々相手にしているうちに育っていく直観は，形のないものですが素晴らしい素材のようなもので，それを形あるものにするのも理論家の重要な仕事ではないかと思います．とにかく，どうにか自力で博士論文を仕上げ，首尾よく審査も合格してその後本郷の花村研に助手で戻ることになりました．それで，物性研の先生方に物性研を去るごあいさつに回ったのですが，そのとき自分のその進路を大きく変えることが起こったのです．

9. Knock the door

当時私は物性研の6階にいましたが，エレベーターがあって，その西側に豊沢研だけがあって，東側には中嶋貞雄先生，福山先生，斯波先生などが居られました．豊沢研は光物性，東側は低温物理，量子輸送，磁性という感じで分野がかなりはっきり分かれていて，正直，西側から見ると東側はなかなか“敷居”が高かったのです．それでもとにかく異動のあいさつに行かねばと，意を決して恐る恐るドアをノックしたわけです．それで，ほとんどの先生とは短く言葉を交わしただけでしたが，福山先生のお部屋に伺ったところ，恐縮するぐらいに親切にしていただき，研究のこと，将来のことなどお話することができました．そのとき，Massachusetts工科大学（MIT）のPatrick A. Leeは自分の友だちだから紹介してあげよう．ポスドクで行ってきたらどうか，と言って下さいました．このLeeという名前は上に書きましたように，私にとっては特別な意味を持っていたので，是非お願いします，と勢い込んで答えたことを思い出します．今振り返るとあのときドアをノックしなければ自分のその後もずいぶんと違ったものになっていたのではないかと思うのです．人との出会いが学問にとって如何に大切か，ということを鮮やかに思い起こさせてくれる出来事でした．

さて本郷に戻ってきたのですが，このころ銅酸化物高温超伝導体の発見という大事件が起こったのです．ことの発端はスイスIBMの論文でしたが，いち早く田中昭二先生の研究室で，超伝導の確認と物質の同定が行われ，世界的なフィーバーとなった事件です．当時，田中研では北沢宏一先生，内田慎一先生，高木英典さんなど後に名を成した方々がひしめいていました．徹夜徹夜で研究が進んでいた頃です．一方の私自身はとんでもない“不良助手”で，随分花村先生にはご迷惑をかけました．なにしろ研究室のテーマなどは全く頓着せずに自分の好き勝手な問題ばかりやっているので

すから．一方ではアメリカに行きたいという気持ちが強くて，いろいろな財団などに応募したりしましたがどれも門前払いでうまくいきませんでした．そのとき，Harvard 大学の物理学科でポスドクの募集があり，これに応募しました．インタビューに来られないかという返事があり，とても無理だな，と思っていたところにまたも花村先生が助け舟（旅費）を出して下さり，初めての海外出張をすることができました．Rochester 大学，Harvard 大学，それから有名なニューヨークのアメリカ物理学会（物理の Woodstock と呼ばれた歴史的な会議でした）とそれぞれ1週間ずつ，回ることができました．Harvard 大学ではインタビューのセミナーを行いましたが，B.I. Halperin 教授や D. Nelson 教授など当時教科書や論文でしか知らなかった人たちが居並ぶ中でとても緊張したことを覚えています．実際には Nelson 教授が私よりも多くの時間しゃべっていて，自分の話ができないという惨憺たるものでしたが，そのセミナーに福山先生のご紹介もあり，Lee 先生が来て下さっていたのです．セミナー後に Halperin 教授の部屋に呼ばれて行ってみると，「我々はすでに候補を数人持っている」という話で，敢えなく不合格ということになりました．それでも，Harvard で Z. Tesanovic 博士に会えたり，MIT に Lee 先生を訪ねたりできたことは大きな収穫でした．ニューヨークの学会の話はやり始めると終わりませんからここでは省略しますが，とにかくすごい熱気で，「物理は情熱でやるものだ」との意を強くして帰国しました．

10. アイデンティティを求めて

帰国してから，自分も高温超伝導の理論をやろうというので，当時物性研に居られた今田正俊先生，物理工学専攻の大学院生だった初貝安弘さんと3人で仕事をしたりしていましたが，ある日 Lee 先生から連絡があってアメリカ滞在にかかる余分の費用を MIT から出すから，こちらに来ないか，という御誘いでした．それまで，何回もチャレンジしてうまくいかなかったことですから，もちろん行きますと即答しました．というわけで，ようやく紆余曲折の末に MIT で研究できることになりました．そちらでは高温超伝導理論をゲージ理論の立場から調べようという話が進んでいて，私も素粒子物理の論文などを乱読して計算三昧の日々を過ごし，1年半後には何とか仕事を論文にまとめることができました．あれだけ無理を言って出てきた大学に手ぶらでは帰れないというプレッシャーは強かったのですが，その1年半の間に得たことは語りつくせません．黒板の前で議論しながら新しいものを作り出していく楽しさはそれまで経験したことがなかったものでした．写真は当時 MIT のその黒板の前で Lee 先生と取ったものです．その後東大に戻ってから研究室を作ることになり，数々の優秀な助手や大学院生の方々に恵まれて今日に至っています．

「ドアをノックし続けること」で初めて「自分とは何者なのか」，が分かるのではないでしょうか．対象は人であったり，学問分野であったり，問題であったりするし，その結果も「捨てる神あれば拾う神あり」で（ほとんどうまくいかないのですが）ある確率では自分の進路を決定するほどの出会いがある，そのとき大きな飛躍が起きるような気がするのです．才能や頭の良さが人によって違うことは否みようがありませんが，それは自分の責任ではありませんし，最もフィットした場所に自分を置くことで自分にしかできない仕事があるのだと思います．それに才能は仕事が作ってくれる，時間に依存したものだと私は信じています．極めて個人的な考えが普遍性を持つところに物理学の醍醐味があるように思うのは私だけではないでしょう．若い人からシニアな研究者を見ると，落ち着き払って冷静に無駄なく仕事を進めているように思えるかもしれませんが，（少なくとも若い頃は）試行錯誤・悪戦苦闘しているものなのです．

偉そうなことを言いましたが，実は今も詰まっている計算やら，国際会議の準備に悪戦苦闘している「現役」なので，昔話はここらへんにして今後20年ほどは封印することにします．お付き合い下さってありがとうございました．

（ながおさ・なおと，東京大学大学院工学系研究科）

特　集（2008年12月号予告）		
確率論的物理観 数学と物理の共進化	「数学のノーベル賞」と統計物理学	香取　眞理
	SLE—Schramm–Loewner Evolution	白井　朋之
	三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性	田崎　晴明
	群の表現論と極限定理	洞　彰人
	ダイマー模型と幾何学	高崎　金久
	交代符号行列の数え上げ問題	岡田　聡一
	大偏差原理と数理物理学	千代延大造
	確率論と流体力学極限	内山　耕平
	確率論的場の量子論	廣島　文生
	[コラム]	南　就将
本体952円	《名著に親しむ》	今野　紀雄

特　集（2008年10月号）		
ポアンカレ 知の巨人が放った創造性の至宝	ポアンカレの水晶玉 序に代えて	小島　定吉
	ポアンカレの哲学	吉田　夏彦
	ポアンカレと保型形式	寺田　俊明
	ポアンカレと非ユークリッド幾何学	松崎　克彦
	ポアンカレと力学系	金　英子
	ポアンカレと位相幾何学 下手にえがかれた図形についての上手な推論	佐藤　肇
	ポアンカレと天体力学	谷川　清隆
	時計仕掛けの地図 ポアンカレと相対性理論	山田　澄生
	ポアンカレと数学的創造	山下　純一
	[コラム] ポアンカレ予想とペレルマン	塩谷　隆
	[インタビュー] ポアンカレに学ぶ	小島　定吉
	《連載》 視覚の科学と数学　その3	新井　仁之
	目で見て学ぶ量子力学　その5	外村　彰
本体952円	《数学の道しるべ》 第4回	河東　泰之

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．かの小林秀雄氏は「考えるとは，物を身に感じて生きる，そういう経験をいう」と言っていますが，細谷先生がインタビューで指摘されていることも同様だと感じます．単なる物知りで終わらせずに，“身に感じて生きる”ロジックを，できるならば自然体に，着流しを着るように，身につけたいと願うこの頃です．孔子も曰く「学びて思わざれば則ち暗し」．（N）

＊　　＊

先日，山に登ってきました．日頃，体を動かしていないせいか，くたくたになってしまいましたが，上から見る街並みは下で見るのとは違い，大変爽快なものでした．

山の上から見る街並みと同様に，論理を通して物理をとらえ直すと，それまでとは違ったように見えるのではないでしょうか．頭と体を使って常にこうした見方ができるようにしたいものです．（R）

数　理　科　学　11月号

2008年11月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社　サイエンス社　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁